Kummer Varieties, in particular surfaces : 22-10-2012

9

→ X = Var. abeliana dim g
$\mathcal{L}$ = line bundle amplio en X
$\mathcal{L} \longleftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_g)$ $d_i \mid d_{i+1}$, $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$\mathcal{L}$ amplio $\iff h^0(\mathcal{L}) > 0$ y $\underbrace{\mathcal{L}\cdot\mathcal{L}\cdots\mathcal{L}}_{g \text{ veces}} > 0$; $h^0(\mathcal{L}) = \prod_{i=1}^{g} d_i = \dfrac{\overbrace{\mathcal{L}\cdots\mathcal{L}}^{g \text{ veces}}}{g!}$

(ver Lange p. 85) Hirz.-Riemann-Roch + Kod. Vanishing

→ $\mathcal{L}^3 := \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ es muy amplio por Lefschetz (Lange p. 84)
(Lefschetz dice si M amplio con $d_1 \geq 3 \Rightarrow \varphi_M : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ embedding)

aquí ente Kummer!

→ ¿Qué sucede con $\mathcal{L}^2$? Sabemos que $X \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}^2}} \mathbb{P}^N$ es holomorfo
(ver Lange) (obs: $N = h^0(\mathcal{L}^2) - 1$, $h^0(\mathcal{L}^2) = 2^g \prod_{i=1}^{g} d_i$)

Descomposición : En general, un line bundle con secciones $\mathcal{L}$ se descompone como $\mathcal{L} = \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{parte} \\ \text{movible}}}{M} + \underbrace{N_1 + \dots + N_r}_{\text{parte fija}}$

Caso de Var. abeliana, parte fija es reducida (Prop 4.16 Lange) y los $N_1, \dots, N_r$ representan divisores irreducibles de X.
Tenemos $h^0(M) \geq 2$ (si M existe) y $h^0(N_i) = 1$ (ya que está fijo)

Teo 3.3.3 (Lange): $\exists$ subtori $K(M)_0$ y $K(N_i)_0$ con M y N_i trivial en ellos y $p_M : X \to X_M := X/K(M)_0$, $p_{N_i} : X \to X_{N_i} := X/K(N_i)_0$
$\overset{\cup}{\overline{M}}$ line bundle $\quad \overset{\cup}{\overline{N}_i}$ line bundle
tal que $M = p_M^*(\overline{M})$ y $N_i = p_{N_i}^*(\overline{N}_i)$ $\forall i$ con $\overline{M}, \overline{N}_i$ amplios y $h^0(\overline{N}_i) = 1$. Se tiene que

$$(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} X_M \times X_{N_1} \times \dots \times X_{N_r} \quad \text{con } p = (p_M, p_{N_1}, \dots, p_{N_r})$$

$$\text{y } \mathcal{L} = p^*(q_M^* \overline{M} \otimes \dots \otimes q_{N_r}^* \overline{N}_r) .$$

y $X \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}^2}} \mathbb{P}^N$ es

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\simeq"] \arrow[drr, "\varphi_{\mathcal{L}^2}"'] & X_M \times X_{N_1} \times \cdots \times X_{N_r} \arrow[r] & \mathbb{P}(M^2) \times \cdots \times \mathbb{P}(N_r^2) \arrow[d, hook, "\text{Segre}"] \\ & & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

Es decir, en general, queremos saber sobre ($\mathcal{L}$ es amplio)

(1) $X \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}^2}} \mathbb{P}^N$ con $\mathcal{L}$ sin componente fija.

(2) $X \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}^2}} \mathbb{P}^N$ con $\underset{\text{irreducible}}{h^0(\mathcal{L}) = 1}$, ie, $\mathcal{L}$ = pol. principal para X. irred.

→ (1) muere con: $\mathcal{L}$ sin comp. fija y amplio $\Rightarrow X \xhookrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}^2}} \mathbb{P}(\mathcal{L}^2)$ es un embedding.

→ Para (2) Tendremos factorización a través de Kummer

Def 1: $X = V/\Lambda$ v.a. $\Rightarrow \mathrm{Kum}(X) := X/\langle(-1)_X\rangle$.

Es una variedad abeliana de dim g y singular en 2^{2g} puntos de mult. 2^{g-1}.

Singularidades son localmente: $\underset{z \mapsto -z}{\mathbb{C}^g \xrightarrow{i} \mathbb{C}^g} \Rightarrow \mathbb{C}^g/\langle i\rangle$ en $(0,..,0)$.

Ej 1: $g = 2 \Rightarrow (x^2+y^2+z^2=0)$ en $(0,0,0)$ en $\mathbb{C}^3$.

Obs: Salvo traslación, podemos considerar $\mathcal{L}$ pol. princ. simétrica ($X \xrightarrow{t_x} X \xrightarrow{\varphi_{t_x^*\mathcal{L}^2}} \mathbb{P}^N$, $X \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}^2}} \mathbb{P}^N$, $t_x^*\mathcal{L}$ sim.). Se toma simétrica para que las secciones de $\mathcal{L}^2 \longleftrightarrow 2H$, $\mathcal{L}^2 = 1$ sean pares (inv. bajo $(-1)_X$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{L}^2}"] \arrow[dr] & \mathbb{P}^{2^g-1} \\ & \mathrm{Kum}(X) \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ ie existe ψ!

Teo (p. 98 Lange): ψ es un embedding.

★ En particular todos los $(X, \mathcal{L})$ ppav caen bajo $\mathcal{L}^2$ en $\mathbb{P}^{2^g-1}$ como Kummer

Caso $g=2$

Ej: $E\times E'$ con E, E' curvas elípticas y polariz. trivial

$\Rightarrow$ $E\times E'/_{(-1)}$ es sup. con 16 sing pero $E\times E' \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, ie, es una cuádrica en $\mathbb{P}^3$.

Si X = sup. abel. y $\mathcal{L}$ pol. princ. $\Rightarrow K_{um}(X) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i^3"'] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{L}^2}"] \\ K_{um}(X) \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

y como $\frac{\mathcal{L}^2}{2} = 1$ ie $\mathcal{L}^2 = 2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^2\cdot\mathcal{L}^2 = 4\cdot 2 = 8$

Pero $X \xrightarrow{2:1} \mathrm{Kum}(X)$ $\Rightarrow$ grado$(\mathrm{Kum}(X)$ en $\mathbb{P}^3) = \frac{8}{2} = 4$.

(En general la misma historia: grado$(\mathrm{Kum}(X)$ en $\mathbb{P}^{2^g-1}) = 2^{g-1}\cdot g!$)

$\longrightarrow$ Sea X = sup. abeliana. Entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} \text{Blow-up de los 16} = Bl_{16}(X) \arrow[r, "2:1"] \arrow[d] & S = Bl_{16}(X)/\mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\text{desingularización de los 16 puntos}"] \\ X \arrow[r, "2:1"] & \mathrm{Kum}(X) \end{tikzcd}$$

localmente: E, -1 $\xrightarrow{f}$ u, a, -2 $\leftarrow f(E)$ curva fija

x, y $\subset X \xrightarrow{a_0}$ $= \mathbb{C}[u,v,w]/(uv-w)$

direcciones quedan invariantes

y así en $Bl_{(0,0)}(X)$ el divisor curva (-1) (E queda fijo por la acción.

$g(x,y) = (x^2, y^2, xy)$, $u = x^2$, $v = y^2$, $w = xy$

Así sobre el punto sing tenemos un $\mathbb{P}^1$ con auto intersección (-2)

Más aún, $dx\wedge dy$ es invariante y en el blow-up

$$d(ya)\wedge dy = y\, da\wedge dy = \frac{da\wedge dy^2}{2} = \frac{da\wedge du}{2} \text{ en } S$$

$\Rightarrow$ no tiene ceros en la vecindad.

$\Rightarrow$ Como $dx\wedge dy$ es global en X $\Rightarrow$ así en $Bl_{16}(X)$

$\Rightarrow$ así en S y no tiene ceros $\Rightarrow$ su divisor es trivial

$\Rightarrow$ $K_S = \mathcal{O}_S$ (trivial). Entonces $p_g(S) = 1$

Ahora miramos $e(S) = e(\mathrm{Kum}(X)) + 16$

Usamos $e(X \setminus A) + e(A) = e(X)$ válido para X complex alg. var.)

pero $e(\mathrm{Kum}(X)) = 8 \quad \left(\underset{0}{\overset{\shortparallel}{e(X)}} = \underset{2(e(\mathrm{Kum})-16)}{\overset{\shortparallel}{e(X \setminus \mathrm{pts})}} + 16 \right)$

$\Rightarrow e(S) = 24$. Como $K_S \simeq \mathcal{O}_S \Rightarrow K_S^2 = 0$

Noether's fórmula: $12\chi = K^2 + e \Rightarrow \chi = 2 \qquad \chi = 1 - q + \underset{1}{p_g}$

$\Rightarrow \boxed{q(S) = 0}$

Así $S = K3$, ie, $q(S) = 0$ y K_S trivial. (Se puede probar que es $\pi_1 = 0$)

Esta K3 es muy especial, tiene 16 curvas (-2) dentro y disjuntas.

(una K3 general no tiene curvas (-2))

Teo (Nikulin) Si $X = K3$ con 16 $\mathbb{P}^1$ $E_1, \dots, E_{16}$ tal que $E_i \cap E_j = \phi$

$\Rightarrow \exists!$ (salvo isom) toro complejo T tal que $T/\langle -1 \rangle = \mathrm{Kum} \xleftarrow{\text{resol}} X \supset \{E_i\}_{i=1}^{16}$.

Obs! - Una cuártica en $\mathbb{P}^3$ con 16 nodos da como resolución una K3 con 16 $\mathbb{P}^1$ disjuntos $\Rightarrow$ es una <u>Kummer</u> y de una <u>Variedad abeliana</u>

, ie, $(X, \mathcal{L}) \xleftrightarrow{1-1}$ Cuártica con 16 Nodos $\hookrightarrow \mathbb{P}^3$ ~~? Falta descartar (1,4)~~

X = sup. abel, $\mathcal{L}$ = P.P. irred, (Jac, Θ)

Tiene que existir el $\mathcal{L}$

$\rightarrow$ hay equaciones para los Kummer en $\mathbb{P}^3$ (ver lomo) dependiendo de param. en $\mathbb{P}^3$ (dim 2). para que sea

¿ Cuál es el sublocus de los Kummer(X) con $X = E \times E'$?

$\rightarrow$ ¿ Cómo recuperar la curva desde la Kummer ?

¿ Mirar la otra construcción como doble plano ramificado en 6 líneas tangentes a una cónica. Con esto un mono, *Remark* 10.3.1. Consider the double cover F of $\mathbb{P}^2$ branched over 6 lines $\ell_1, \dots, \ell_6$ tangent to an irreducible conic C. It is isomorphic to a hypersurface in $\mathbb{P}(3,1,1,1)$ given by the equation $z^2 - f_6(x_0, x_1, x_2)$, where $V(f_6)$ is the union of 6 lines. The restriction of f_6 to the conic C is the divisor $2D$, where D is the set of points where the lines are tangent to C. Since $C \cong \mathbb{P}^1$ we can find a cubic polynomial $g(x_0, x_1, x_2)$ which cuts out D in C. Then the preimage of C in F is defined by the equation $z^2 - g_3^2 = 0$ and hence splits into the union of two curves $C_1 = V(z - g_3)$ and $C_2 = V(z + g_3)$ each isomorphic to C. These curves intersect at 6 points. The surface F has 15 ordinary double points over the points $p_{ij} = \ell_i \cap \ell_j$. Let $\bar{F}$ be a minimal resolution of F. It follows from the adjunction formula for a hypersurface in a weighted projective space that the canonical class of F is trivial. Thus $\bar{F}$ is a K3 surface. Since C does not pass through the points p_{ij} we may identify C_1, C_2 with their preimages in $\bar{F}$. Since $C_1 \cong C_2 \cong \mathbb{P}^1$, we have $C_1^2 = -2$. Consider the divisor class H on $\bar{F}$ equal to $C_1 + L$, where L is the preimage of a line in $\mathbb{P}^2$. We have

$$H^2 = C_1^2 + 2C_1 \cdot L + L^2 = C_1^2 + (C_1 + C_2) \cdot L + L^2 = -2 + 4 + 2 = 4.$$

We leave to the reader to check that the linear system $|H|$ maps $\bar{F}$ to a quartic surface in $\mathbb{P}^3$. It blows down all 15 exceptional divisors of $\bar{F} \to F$ to double points and blows down C_1 to the sixteenth double point.

Conversely, let Y be a quartic surface in $\mathbb{P}^3$ with 16 ordinary double points. Projecting the quartic from a double point q, we get a double cover of $\mathbb{P}^2$ branched along a curve of degree 6. It is the image of the intersection R of Y with the polar cubic $P_q(Y)$. Obviously, R the singular points of Y are projected to 15 singular points of the branch curve. A plane curve of degree 6 with 15 singular points must be the union of 6 lines $\ell_1, \ldots, \ell_6$. The projection of the tangent cone at q is a conic everywhere tangent to these lines.

Theorem 10.3.14. *A Kummer surface is projectively isomorphic to a quartic surface in $\mathbb{P}^3$ with equation*

$$A(x^4 + y^4 + z^4 + w^4) + 2B(x^2w^2 + y^2z^2) + 2C(y^2w^2 + x^2z^2)$$

$$+2D(z^2w^2 + x^2y^2) + 4Exyzw = 0, \tag{10.32}$$

where

$$A(A^2 + E^2 - B^2 - C^2 - D^2) + 2BCD = 0. \tag{10.33}$$