# EJERCICIOS Y PROBLEMAS
## CURSILLO DE VERANO
## “CONFIGURACIÓN DE CURVAS PLANAS”

## GIANCARLO URZÚA, UC CHILE

## 4 AL 8 DE ENERO DE 2021

**Día 1:**

1. a) Mostrar que $\{(0,0),(1,0),(0,1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \colon f(x,y) = 0\}$ para algún $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$. ¿Qué sucede si cambias $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$?
   b) Mostrar que todo conjunto finito de puntos en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ es igual a $\{(x,y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \colon f(x,y) = 0\}$ para algún $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$.
   c) (Desafío) b) con $f(x,y)$ irreducible en $\mathbb{R}[x,y]$.
2. Considerar $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ como el plano en coordenadas polares $(\rho,\theta)$. Mostrar que $\{(\rho,\theta) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \colon \rho = \theta\}$ no es una curva plana.
3. Asumir que la característica de $k = \bar{k}$ es 2. Mostrar que toda recta por $[0,0,1]$ es tangente a $\{xy - z^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2_k$. ¿Qué puedes decir para otras cuádricas, otros puntos, y otras características?
4. Sea $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva de grado dos tal que $P = [0,0,1] \in C$, y $P$ es un punto singular. Demostrar que $C$ está compuesta por una o dos rectas.
5. Una *parametrización* de una curva plana irreducible $\{(x,y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \colon f(x,y) = 0\}$ es la existencia de funciones racionales $x(t), y(t) \in \mathbb{C}(t)$ no constantes tales que
$$f(x(t), y(t)) = 0$$
en $\mathbb{C}(t)$.
   a) Muestre que toda recta es parametrizable.
   b) Muestre que toda cuádrica es parametrizable.
   c) Muestre que las cúbicas $\{y^2 = x^3\}$ y $\{y^2 = x^2(x+1)\}$ son ambas parametrizables.
   d) (**Desafío**) Muestre que la cúbica
$$\{y^2 = x(x+1)(x+\lambda)\}$$
   NO es parametrizable si $\lambda \neq 0, 1$.

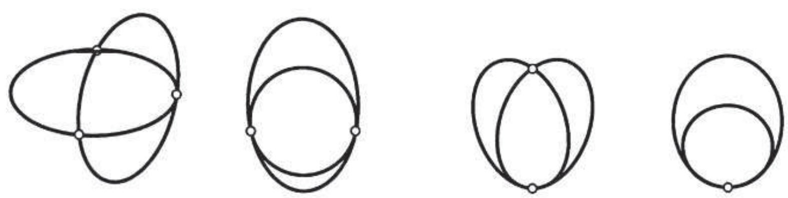
*Date*: 2 de enero de 2021.

6. Encontrar un criterio que permita decidir cuándo la cuádrica
$$\{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0\}$$
es irreducible, en función de las constantes $A, B, C, D, E, F$. Pensar en el espacio de las cuádricas como $\mathbb{P}^6_{\mathbb{C}}$ y fuera de tu criterio, la cual será una expresión algebraica en $A, B, C, D, E, F$, tus cuádricas son nosingulares (lo que llamamos cónicas, ¿Porqué se llaman así?).

7. Encontrar todas las intersecciones entre $\{x^2 + y^2 = z^2\}$ y $\{x^2 + y^2 = 2z^2\}$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con sus respectivas multiplicidades.

8. Sean $F, G$ dos cuádricas sin componentes comunes en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ intersectándose en 4 puntos distintos. Sea $H$ una cónica que contiene a estos 4 puntos. Mostrar que entonces existen $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $H = aF + bG$. ¿Qué sucede en grados mayores?

9. Demostrar que cada una de las intersecciones de las cónicas ilustradas abajo es posible. (Salvo la intersección en 4 puntos, estas son todas las posibilidades.) Para eso, debe encontrar ecuaciones explícitas.



Por ejemplo, puedes centrarte en $[0, 0, 1]$ y así en la carta afín $U_z$, y tomar cónicas tangentes de la forma
$$F_i = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 + y = 0$$
con $i = 1, 2$. Luego la intersección de $F_1$ y $F_2$ en $(0, 0)$ se puede reducir por el axioma 7 a la intersección de $F_1$ con $F_1 - F_2$, esta última representa dos rectas! Si ambas son $y = 0$ (i.e. $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$), entonces la multiplicidad en $(0, 0)$ es 4. Si una es $y = 0$ y la otra no, entonces la multiplicidad en $(0, 0)$ es 3, etc. Por ejemplo la circunferencia
$$x^2 + (y + 1)^2 = 1$$
se intersecta con la elípse
$$4x^2 + (4y + 1)^2 = 1$$
sólamente en $(0, 0)$, y así con multiplicidad 4.

10. Sea $C$ una circunferencia en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, y sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en $C$ tal que sus lados opuestos no son paralelos. Mostrar que las tres intersecciones de los tres pares de rectas de lados opuestos son colineales. Deducir teoremas para los casos que tengamos lados paralelos.
11. Adaptar la demostración del teorema de Pascal para demostrar el teorema de Pappus: "Considerar rectas $L$ y $L'$ como en la Figura 1, donde $A, B, C \in L$ y $A', B', C' \in L'$. Entonces los puntos $P, Q, R$ son colineales". Relacionar con el terema de Desargues.

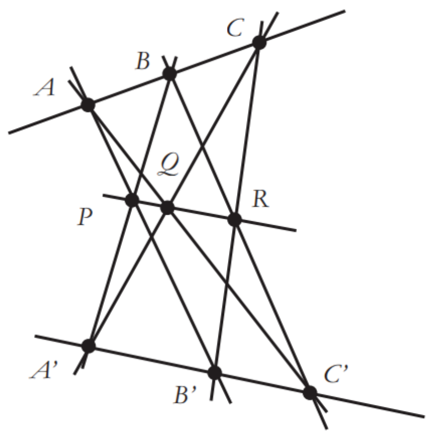



FIGURA 1. Teorema de Pappus para $k = \mathbb{R}$

12. (**Desafío**) Sean $ABCD$ puntos en una circunferencia $\mathcal{C}$. Sean $L, L'$ rectas tangentes a $\mathcal{C}$ en $A$ y $D$ respectivamente. Demostrar que los puntos $L \cap L'$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$ son colineales.

**Día 2:**

1. El libro *"Geometry and the imagination"* por D. Hilbert y S. Cohn-Vossen (1952), capítulo III, relata sobre configuraciones $P_nL_m$ y su relevancia en geometría clásica. Una configuración $P_nL_m$ es una configuración de $L$ rectas y $P$ puntos en el plano, tales que por cada uno de los $P$ puntos pasan exactamente $n$ de las $L$ rectas, y cada una de las $L$ rectas contiene exactamente $m$ de los $P$ puntos. Una configuración $P_nP_n$ se denota simplemente por $P_n$.
   a) Mostrar que toda configuración $P_nL_m$ satisface $P \cdot n = L \cdot m$.
   b) ¿Cuáles son las configuraciones $P_1$?
   c) Clasificar las configuraciones $P_2$.
   d) Mostrar que una configuración $P_3$ debe tener $P \geq 7$. Mostrar que la combinatoria de una $7_3$ es única. Construir una configuración $7_3$.
   e) Mostrar que hay una única combinatoria para $8_3$. Construir una $8_3$. ¿Es posible hacerlo sobre $\mathbb{R}$?
   f) Mostrar que el teorema de Pappus realiza una $9_3$. ¿Hay sólo una posible combinatoria?

2. (**Desafío**) Considera la cúbica nosingular

$$C = \{zy^2 = x(x+z)(x+\lambda z)\}$$

   en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, donde $\lambda \neq 0, 1$. Mostrar que $C$ tiene exactamente 9 puntos de inflexión, es decir, puntos en $C$ con recta tangente de multiplicidad 3. Demostrar que hay exactamente 12 rectas a través de esos 9 puntos (tales que continen al menos 2 puntos) y que forman una configuración con $t_2 = 12$, $t_4 = 9$, $t_m = 0$ si $m \neq 2, 4$. Notar que realiza una configuración $9_4 12_3$. Esta es la *configuración de Hesse*. Mostrar que es única salvo cambio de coordenadas (a pesar que había un $\lambda$ en $C$).

3. Construir una configuración de Reye, es decir, una $12_4 16_3$. Haga un poco de investigación en la literatura sobre tal configuración.

4. Encontrar explícitamente todos los $m$-puntos de una configuración de Ceva $\{(x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n) = 0\}$ en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Dualizando los 12 3-puntos para $n = 3$, redescubrir la configuración de Hesse.

5. Mostrar que existe una única configuración de 7 rectas con $t_3 = 7$ salvo cambio de coordenadas de $\mathbb{P}^2_k$. ¿Cuáles son los posibles $k$?

6. Sea $\{\mathcal{A}_{d_n}\}$ una colección infinita de configuraciones de $d_n$ rectas con $d_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Asumir que no son triviales ni cuasi-triviales. Mostrar que $\bar{c}_2(\mathcal{A}_{d_n}) \to \infty$.

7. (**Problema abierto**) Clasificar todas las configuraciones de rectas con sólo puntos triples sobre $\mathbb{C}$. Notar que combinatorialmente hay infinitas de ellas.

8. Construir configuración de 6 rectas y $n$ cónicas tal que $t_{n+3} = 4$ y $t_2 = 3$. Calcular sus números de Chern.

9. Construir configuraciones interesantes/especiales de cónicas y las 9 rectas del teorema de Pappus. Calcular los números de Chern.

10. Estudiar la configuración de 21 cónicas y 21 rectas en "The 21 reducible polars of Klein's quartic"por P. Pokora y J. Roe en arXiv:1803.06411 [math.AG]. Parece ser la configuración de cónicas y rectas con pendiente de Chern más alta en la literatura. Su construcción se relaciona con el grupo de 168 automorfismos de la cuártica de Klein.

11. (**Problema abierto**) Encontrar una desigualdad optimal entre números de Chern para configuraciones de cónicas y rectas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

**Día 3:**

1. Clasificar configuraciones con pendientes de Chern bajas, esto es, pendientes menores que $a < 2$. ¿Qué necesitamos de $k$? Por ejemplo partir con $a = \frac{3}{2}$.
2. Demostrar la caracterización de la igualdad en el teorema de de Bruijn–Erdos.
3. Demostrar el lema de densidad de pendientes de Chern.
4. Verificar el argumento de geometría Euclidiana al final de la demostración del teorema de Sylvester-Gallai.
5. Encontrar todas las configuraciones simpliciales de $3, 4, 5$ y $6$ rectas. ¿Podrías con 7 rectas?
6. Encontrar todos los números combinatoriales de las configuraciones de $2n$ rectas provenientes de polígonos regulares de $n$ lados. ¿Porqué para $n > 6$ no podemos definir esas rectas con coeficientes en $\mathbb{Q}$?
7. (**Desafío**) Dibujar la colección de configuraciones sobre $\mathbb{Q}$ que producen el record 2,375. Encontrar sus números combinatoriales y pavimentaciones. Intentar mejorar el record con tu propia familia de configuraciones sobre $\mathbb{Q}$.

**Día 4:**

1. (**Problema abierto**) Clasificar las configuraciones simpliciales. Un buen paper sobre este problema es "A catalogue of simplicial arrangements in the real projective plane" por B. Grunbaum en Ars Math. Contemp. 2 (2009), no. 1, 1–25.
2. (**Problema abierto**) Encontrar una demostración topológica a la desigualdad de Hirzebruch-Sakai. Para detalles sobre esa desigualdad mirar el libro reciente "Complex ball quotients and line arrangements in the projective plane" por P. Tretkoff en Mathematical Notes, 51. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016. Si sabes Alemán mirar "Geradenkonfigurationen und Algebraische Flachen" por G. Barthel, F. Hirzebruch y T. Hofer en Aspects of Mathematics, 1987.
3. (**Problema abierto**) Mostrar que no hay puntos de acumulación para $\bar{c}_1^2/\bar{c}_2$ en $[5/2+\epsilon, 8/3]$ cuando $k = \mathbb{C}$. Para mirar configuraciones en ese intervalo revisar el paper original de Hirzebruch "Arrangements of lines and algebraic surfaces", Arithmetic and geometry, Vol. II, 113–140, Progr. Math., 36, Birkhauser, Boston, Mass., 1983.
4. (**Problema abierto**) A partir del teorema Nullstellensatz de Hilbert, se puede mostrar que si hay configuración compleja con $\bar{c}_1^2/\bar{c}_2$ fijo, entonces la hay con coeficientes en una extensión finita $k$ de $\mathbb{Q}$. ¿Existirá desigualdad en función explícita de $\bar{c}_1^2$, $\bar{c}_2$, y de $k$? A modo de ejemplo la configuración dual de Hesse está definida sobre los números de Eisenstein. ¿Será que eliminando ese cuerpo podemos llegar a una desigualdad más restrictiva?

**Día 5:**

1. Encontrar $r$-nets en característica positiva para todo $r$.
2. (**Desafío**) Demostrar que no existen $m$-nets sobre $\mathbb{C}$ para $m > 5$. Más desafiante aun es demostrarlo para $m = 5$. Puedes encontrar una demostración elemental en "k-nets embedded in a projective plane over a field"por G. Korchmaros, G. Nagy y N. Pace en Combinatorica 35 (2015), no. 1, 63–74. ¿Qué puedes decir para $m = 4$ usando la demostración en ese artículo? En efecto, se pueden descartar infinitas de ellas, pero ¿Puedes ir más allá y descartarlas todas?
3. (**Desafío**) La combinatoria de una 3-net la define un cuadrado Latino. A veces es la tabla de multiplicar de un grupo. ¿Qué grupos son posibles para una 3-net? Después de tratar por tu cuenta, mirar la respuesta precisa en "3-nets realizing a group in a projective plane"por G. Korchmaros, G. Nagy y N. Pace en J. Algebraic Combin. 39 (2014), no. 4, 939–966.
4. (**Problema abierto** casi resuelto) Demostrar que la única 4-net compleja es la configuración de Hesse. Mirar "The only complex 4-nets is the Hesse configuration", por A. Bassa y A. Ozgur en arXiv:2002.02660 [math.AG], 7 de Febrero de 2020.