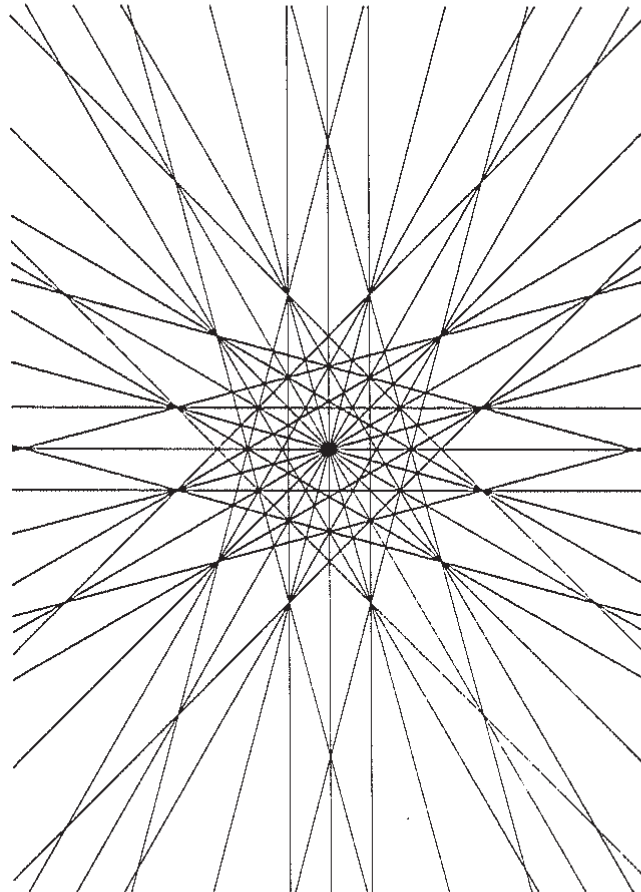


UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA
ALGEBRAICA:
CONFIGURACIONES DE RECTAS EN EL PLANO
EMALCA POTOSÍ BOLIVIA
16-20 SEPTIEMBRE 2019

GIANCARLO URZÚA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE



Date: 19 de septiembre de 2019.

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| 1. Notaciones y preliminares | 3 |
| 2. Conjuntos algebraicos y teoremas de Hilbert | 4 |
| 3. Plano proyectivo, intersección de curvas y teorema de Bézout | 8 |
| 4. Rectas y cónicas | 12 |
| 5. Configuraciones de rectas I: Ejemplos y Combinatoria | 15 |
| 6. Configuraciones de rectas II: Números de Chern y geografía | 18 |
| 7. Algunos problemas sobre configuraciones de rectas | 21 |
| 8. Ejercicios | 24 |
| Referencias | 27 |

1. NOTACIONES Y PRELIMINARES

En este mini-curso asumiremos definiciones y conocimiento muy básico de anillos conmutativos, ideales, cuerpos y polinomios. Un muy buen libro para aprender álgebra desde cero es [Art], y para aprender álgebra conmutativa sabiendo algo de álgebra es [AtMac]. Nuestros anillos conmutativos y sus morfismos serán siempre como en la Sección 1 de [AtMac].

\mathbb{Z} es el anillo de los números enteros.

\mathbb{Q} es el cuerpo de los números racionales.

\mathbb{R} es el cuerpo de los números reales.

\mathbb{C} es el cuerpo de los números complejos.

Naturalmente tenemos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ como subanillos.

Si R es un anillo conmutativo, entonces $R[x_1, \dots, x_n]$ es el correspondiente anillo de polinomios con coeficientes en R .

Si k es un cuerpo, entonces \bar{k} es su clausura algebraica. Un cuerpo k se dice algebraicamente cerrado si $k = \bar{k}$. Por ejemplo $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}}$.

Para un primo p , \mathbb{F}_{p^s} es el cuerpo de p^s elementos. Así $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}/(p)$.

Dado un ideal propio I de un anillo conmutativo R , el anillo cociente se denota por R/I . El ideal I es primo ssi R/I es dominio. El ideal I es maximal ssi R/I es cuerpo.

Para reforzar conocimiento básico de álgebra, se recomienda leer y hacer los ejercicios de la Sección 1 del Capítulo 1 de [Fult].

2. CONJUNTOS ALGEBRAICOS Y TEOREMAS DE HILBERT

Sea k un cuerpo cualquiera. Dado un entero $n \geq 1$, se define el **espacio afín** n dimensional como

$$\mathbb{A}_k^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in k\}.$$

De esta forma, el espacio afín es simplemente k^n . Si $n = 1$ lo llamaremos **recta** afín, si $n = 2$ **plano** afín, y si $n = 3$ **espacio** afín.

Definición 2.1. Un conjunto $V \subset \mathbb{A}_k^n$ se dice **conjunto algebraico afín** si existe $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ tal que

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

Es decir, un conjunto algebraico afín corresponde a los ceros simultaneos en k^n de algún sistema de ecuaciones polinomiales. Será denotado por $V(S)$. Si S es finito y $S = \{f_1, \dots, f_m\}$, entonces escribiremos $V = V(f_1, \dots, f_m)$. Notar que

$$V = V(f_1, \dots, f_m) = \bigcap_{i=1}^m V(f_i).$$

Si $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $V(f)$ se llama **hipersuperficie**.

Por ejemplo, los siguientes son conjuntos algebraicos del plano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$:

1. Conjunto vacío, ya que es igual a $V(1)$.
2. $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ ya que $V(0) = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
3. $\{(1, 2)\}$ ya que $V(x_1 - 1, x_2 - 2) = \{(1, 2)\}$.
4. Cualquier recta L ya que $L = V(ax_1 + bx_2 + c)$ para algunos $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a, b no ambos cero.
5. La circunferencia C de radio 1 y centro $(0, 0)$ ya que

$$C = V(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Un poco más ingenioso es mostrar que todo conjunto finito de puntos en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ es algebraico. Por otro lado, el conjunto $\{(x, \cos(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ no es algebraico. ¿Porqué?

Proposición 2.2. Sean $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. Entonces $V(fg) = V(f) \cup V(g)$.

Demostración. Tarea. □

Proposición 2.3. La unión finita de conjuntos algebraicos es conjunto algebraico.

Demostración. Tarea. □

Proposición 2.4. Sean $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$, y sea $\lambda \in k$. Entonces

$$V(f_1, \dots, f_m) = V(f_1 + \lambda f_2, f_2, f_3, \dots, f_m).$$

Demostración. Tarea. □

La proposición anterior te debería recordar la eliminación Gaussiana vista en todo curso de álgebra lineal.

Proposición 2.5. Sea $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$. Considerar el ideal $I = \langle S \rangle$ generado por S . Entonces $V(S) = V(I)$.

Demostración. Tarea. □

La Proposición 2.5 nos dice que todo conjunto algebraico depende de un ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$. El siguiente teorema nos describe una propiedad de finitud de estos ideales.

Teorema 2.6. (*Teorema de la base de Hilbert*) Sea I un ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$. Entonces existen $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $I = (f_1, \dots, f_m)$.

Demostración. Si $n = 1$, entonces usaremos el algoritmo de la división de $k[x_1]$. Si $I = k[x_1]$, entonces $I = (1)$. Si $I \neq k[x_1]$, entonces elegimos $f \in I$ con menor grado entre todos los polinomios en I . Obviamente $(f) \subset I$. Sea $g \in I$. Entonces existen $a, b \in k[x_1]$ tales que

$$g = af + b$$

con $b = 0$ o $\text{grado}(f) > \text{grado}(b)$. Pero $b = g - af \in I$, y por la minimalidad del grado de f , tenemos que $b = 0$. Así $g = af$, lo que implica que $g \in (f)$. Luego $I \subset (f)$, y así $I = (f)$.

Para $n > 1$ se realiza un proceso inductivo, asumiendo el resultado para $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ y demostrándolo para $k[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n] = k[x_1, \dots, x_n]$. Para eso, se escribe cada polinomio f en $k[x_1, \dots, x_n]$ como $f = a_0 + a_1x_n + \dots + a_dx_n^d$ con $a_d \neq 0$. Luego, para un ideal I , el conjunto de los a_d donde $f \in I$ forman un ideal. Usando esa idea se reordena todo de una manera adecuada para usar inducción y probar el teorema. La demostración la puedes leer en la Sección 4 del Capítulo 1 de [Fult]. □

Observamos que este teorema es parte de un teorema más general en relación a anillos Noetherianos, y de esa forma está presentado en [Fult].

Corolario 2.7. *Todo conjunto algebraico tiene la forma $V(f_1, \dots, f_m)$ para algunos $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$. Es decir, todo conjunto algebraico se puede definir a través de los ceros de un sistema finito de ecuaciones polinomiales.*

Demostración. Sea V algebraico. Por la Proposición 2.5 tenemos que existe ideal I tal que $V = V(I)$. Por el Teorema de los ceros de Hilbert tenemos que $I = (f_1, \dots, f_m)$, y así $V = V(f_1, \dots, f_m)$. □

Definición 2.8. Un conjunto algebraico V es **reducible** si $V = V_1 \cup V_2$, donde V_1, V_2 son conjuntos algebraicos y $V_i \neq V$ para $i = 1, 2$. De lo contrario se llamará **irreducible**. Una **variedad afín** es un conjunto algebraico (afín) irreducible de \mathbb{A}_k^n .

Por ejemplo, las cúbicas $V(x_2^2 - x_1^3)$ y $V(x_2^2 - x_1^2(x_1 + 1))$ son irreducibles en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, pero $V(x_1x_2)$ y $V(x_1x_2 - x_1^3)$ son reducibles.

A través del teorema de la base de Hilbert, se puede mostrar que todo conjunto algebraico es una unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles.

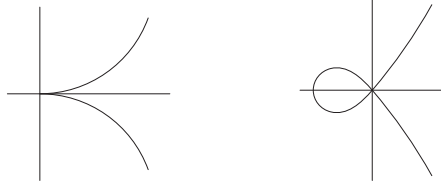


FIGURA 1. Cúbicas irreducibles $V(x_2^2 - x_1^3)$ y $V(x_2^2 - x_1^2(x_1 + 1))$

¿Qué ideales definen al conjunto vacío? La Proposición 2.5 nos dice, por ejemplo, que si $I = k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $V(I) = \emptyset$. Si $k = \mathbb{R}$, entonces $V(x_1^2 + 1) = \emptyset$ también. Notar que si $k = \bar{k}$ y f es un polinomio no constante, entonces $V(f) \neq \emptyset$. Notablemente la condición $k = \bar{k}$ nos organiza que sucede con los conjuntos algebraicos afines, a través del Nullstellensatz de Hilbert.

Teorema 2.9. (*Teorema de los ceros de Hilbert*) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea I ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$. Entonces $V(I) = \emptyset$ ssi $I = k[x_1, \dots, x_n]$.

Demostración. Obviamente si $I = k[x_1, \dots, x_n]$, entonces $1 \in I$ con lo cual $V(I) = \emptyset$. La otra implicancia es la complicada, y mostraremos parte de la prueba. Primero, todo ideal propio de un anillo conmutativo con $1 \neq 0$ (como son nuestros anillos) está contenido en algún ideal maximal. Para eso mirar [AtMac, p. 4]. Notar que si dos ideales I, J satisfacen $I \subset J$, entonces $V(J) \subset V(I)$. Luego basta con demostrar el teorema para un ideal maximal I .

Sea I ideal maximal de $k[x_1, \dots, x_n]$. Considerar el morfismo cociente $\phi: k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]/I$, donde $\phi(f)$ es la clase de f módulo I . Como I es maximal, tenemos que $k \subset k[x_1, \dots, x_n]/I$ y $k[x_1, \dots, x_n]/I$ es un cuerpo. El ingrediente algebraico potente es: Como $k = \bar{k}$, entonces $k[x_1, \dots, x_n]/I = k$. Se recomienda mirar la Sección 10 del Capítulo 1 de [Fult].

Luego $\phi: k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$ y definimos $a_i = \phi(x_i) \in k$ para cada i . Luego $\phi(x_i - a_i) = 0$ para todo i , y así $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset I$. Pero $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ es maximal (fácil demostrarlo) con lo cual $I = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Luego $V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = V(I)$, y $V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$, y así $V(I) \neq \emptyset$. Luego $V(I) = \emptyset$ tiene que implicar $I = k[x_1, \dots, x_n]$. □

Definición 2.10. Dada un conjunto algebraico afín V , se define el **ideal de V** como

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(p) = 0 \text{ para todo } p \in V\}.$$

Es decir, el ideal $I(V)$ es el conjunto de todos los polinomios que se anulan en V . El **anillo de coordenadas** de V es $k[x_1, \dots, x_n]/I(V)$.

Es fácil ver que si $V = V(I)$ para algún ideal I , entonces $I \subset I(V)$. En general no es cierto que $I = I(V)$. Cuando $k = \bar{k}$ tenemos la siguiente caracterización de $I(V)$.

Corolario 2.11. *(del Nullstellensatz de Hilbert) Si $k = \bar{k}$ y $V = V(I)$ es un conjunto algebraico, entonces*

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f^m \in I \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Demostración. Tarea. Buscar el lindo truco de Rabinowitsch en Capítulo 1 Sección 7 de [Fult]. \square

3. PLANO PROYECTIVO, INTERSECCIÓN DE CURVAS Y TEOREMA DE BÉZOUT

Sea k un cuerpo arbitrario. El espacio proyectivo \mathbb{P}_k^n se puede entender inductivamente como la compactificación en el infinito del espacio afín \mathbb{A}_k^n por \mathbb{P}_k^{n-1} , donde \mathbb{P}_k^0 es un punto.

Ejemplo 3.1. Si $k = \mathbb{R}$, entonces \mathbb{P}_k^1 es la recta real \mathbb{A}_k^1 compactificada por un punto al infinito, es decir \mathbb{P}_k^1 tiene la forma de una circunferencia. El plano proyectivo real \mathbb{P}_k^2 es \mathbb{A}_k^2 compactificado con \mathbb{P}_k^1 al infinito, algo más difícil de visualizar.

Para entender esto mejor, se define el **espacio proyectivo** de dimensión n como

$$\mathbb{P}_k^n := k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} / \sim$$

dónde la relación de equivalencia es: $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ si y sólo si existe $\lambda \in k \setminus 0$ tal que $\lambda x_i = y_i$ para todo i . Representamos los puntos en \mathbb{P}_k^n como tuplas $[x_0, \dots, x_n]$, donde por definición existe algún i tal que $x_i \neq 0$.

Luego, si $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_k^n : x_i \neq 0\}$, entonces identificamos U_i con \mathbb{A}_k^n tal que las coordenadas de \mathbb{A}_k^n son $\frac{x_j}{x_i}$ para $j \neq i$, y naturalmente el complemento de U_i (es decir, $\{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_k^n : x_i = 0\}$) queda identificado con \mathbb{P}_k^{n-1} . Llamaremos a los conjuntos U_i las **cartas afines** de \mathbb{P}_k^n . Por ejemplo, si $n = 1$, entonces \mathbb{P}_k^1 tiene como puntos $[x_0, x_1]$. Tomemos U_0 el cual es \mathbb{A}_k^1 con coordenada $\frac{x_0}{x_1}$ y $\mathbb{P}_k^1 = U_0 \cup \{[0, 1]\}$.

Definición 3.2. Un polinomio $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ se dice **homogéneo** si $F(tx_0, \dots, tx_n) = t^d F(x_0, \dots, x_n)$ para algún d . Un conjunto $V \subset \mathbb{P}_k^n$ se dice **conjunto algebraico proyectivo** si existe un conjunto de polinomios homogéneos S en $k[x_0, \dots, x_n]$ tal que

$$V = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_k^n : F(x_0, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } F \in S\}.$$

Si $S = \{F_1, \dots, F_m\}$, entonces escribiremos $V = V(F_1, \dots, F_m)$. Un conjunto algebraico proyectivo se dice **variedad proyectiva** si es irreducible, en analogía a la definición de la irreducibilidad afín.

El espacio proyectivo relevante para este mini-curso es el plano proyectivo \mathbb{P}_k^2 , cuyas coordenadas se denotarán por $[x, y, z]$, y sus tres cartas afines son $U_x = \{x \neq 0\}$, $U_y = \{y \neq 0\}$ y $U_z = \{z \neq 0\}$ (todas copias de \mathbb{A}_k^2). Una **curva plana** de grado d en \mathbb{P}_k^2 es el conjunto algebraico proyectivo C definido por un polinomio homogéneo F de grado $d > 0$, es decir

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}_k^2 : F(x, y, z) = 0\}.$$

Notar que C no necesita ser irreducible. A veces nos referiremos a la curva C a través del polinomio F que la define.

Un **cambio de coordenadas** T es una función $T: \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ tal que

$$T[x, y, z] = [a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z]$$

y la matriz (a_{ij}) de 3×3 con coeficientes en k es invertible. Si $T': \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ es la inversa de T (la cual es cambio de coordenadas también), entonces para cada curva $C = \{F = 0\}$ tenemos que $T(C)$ es la curva dada por $\{F(T'[x, y, z]) = 0\}$. Por ejemplo, tomemos $T[x, y, z] = [\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2}, z]$ cambio de coordenadas en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, y sea $C = \{xy - z^2 = 0\}$. Luego, $T'[x, y, z] = [x - y, x + y, z]$ y $C' = \{x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$. Hace un dibujo de la situación.

Dada una curva F y un punto $P \in F$, entonces se dice que P es un punto **singular** de F si y sólo si

$$F_x(P) = F_y(P) = F_z(P) = 0,$$

donde F_t son las derivadas parciales (formales) de F con respecto a t . Sea T un cambio de coordenadas que envía P a $[0, 0, 1]$, y sea

$$F(T'[x, y, 1]) = f_{r_1} + f_{r_2} + \dots + f_{r_m},$$

donde los f_{r_i} son polinomios homogéneos en x, y de grado r_i y $r_1 < r_2 < \dots < r_m$. Se define la **multiplicidad** de $P \in F$ como $m_P = r_1$. Notar que $m_P > 1$ si y sólo si P es una singularidad de F (tarea). Si $k = \bar{k}$, el polinomio f_{r_1} se factoriza completamente en rectas. A la imagen de estas rectas bajo T' las llamamos **rectas tangentes** de F en P . Por ejemplo, las rectas tangentes en $[0, 0, 1]$ de $V(zy^2 - x^2(x + z))$ son $y = x$ y $y = -x$, las de $V(zy^2 - x^3)$ es $y = 0$, y la de $V(zy^2 - x(x^2 - z^2))$ es $x = 0$.

Si $k = \bar{k}$, entonces una curva plana contiene infinitos puntos. Si $k = \mathbb{R}$, entonces una curva podría tener finitos puntos o incluso ser el conjunto vacío, pero en muchos ejemplos representa un conjunto del plano el cual se visualiza como una curva (ver Figura 1).

Por ejemplo, sobre cada una de las cartas afines U_x, U_y, U_z dibuja en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ los conjuntos:

1. $V(x + y - z)$.
2. $V(x^2 + y^2 - z^2)$.
3. $V(xy - z^2)$.
4. $V(xyz)$.

Curvas planas de grado 1 se llamarán **rectas**, las de grado 2 se llamarán **cónicas**, las de grado 3 **cúbicas**, las de grado 4 **cuárticas**, etc. Ahora queremos intersectar curvas planas.

Proposición 3.3. *Dos rectas distintas en \mathbb{P}_k^2 siempre se intersectan en un punto.*

Demostración. Tarea. Es resolver cuidadosamente un sistema lineal muy simple. \square

Proposición 3.4. *Sea L una recta y C una curva plana de grado d que no contiene a L . Entonces los puntos de intersección de L con C_d son a lo más d .*

Demostración. Tarea. Es evaluar la curva C en la recta, y usar que un polinomio en 1 variable de grado d tiene a lo más d ceros. \square

Teorema 3.5. Sean $C = \{F = 0\}$ y $C' = \{G = 0\}$ dos curvas planas tal que F y G no tienen divisores comunes. Entonces la intersección de C y C' es finita.

Demostración. Podemos suponer que F y G son polinomios en dos variables, ya que al infinito pueden tener a lo más finitos ceros comunes (por la proposición de más arriba).

Luego $F, G \in k[u, v]$ tal que F y G no tienen divisores comunes. Luego pensar en $k(u)[v]$, y como es un dominio Euclidiano (más el Lema de Gauss, ver [Art, Sect.3 Ch.11]), tenemos que existen $A, B \in k(u)[v]$ tales que

$$AF + BG = 1.$$

Ahora limpiar denominadores para obtener $A', B' \in k[u, v]$ y $C \in k[u]$ tal que

$$A'F + B'G = C.$$

Pero si (u_0, v_0) es cero de F y de G , entonces por la ecuación anterior $C(u_0) = 0$. Pero C tiene a lo más un número finito de ceros, y así u_0 tiene finitas posibilidades. Ahora hacemos lo mismo para v , es decir considerar $k(v)[u]$, y obtenemos a lo más finitos v en los ceros comunes de F y G . \square

Tenemos entonces que la intersección de curvas planas sin componentes comunes es finita. Luego queremos calcularla. El problema son las singularidades, las tangencias y el cuerpo de definición k . Las singularidades y tangencias deben ser contadas con cierta multiplicidad adecuada, y si $k = \bar{k}$ obtendremos exactamente la intersección entre dos curvas. Eso será el Teorema de Bézout.

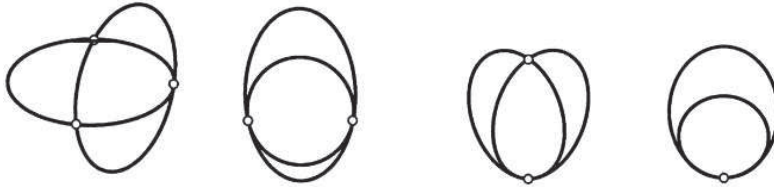


FIGURA 2. Intersecciones especiales entre cónicas.

Pasamos ahora a definir número de intersección (mirar Sección 3 del Capítulo 3 de [Fult]). De ahora en adelante $k = \bar{k}$. Para $C = \{F = 0\}$ y $C' = \{G = 0\}$ sin componentes comunes (en caso contrario su intersección sería infinita), se definirá el número de intersección de C y C' como

$$C \cdot C' := \sum_{P \in C \cap C'} I(P, C \cap C'),$$

donde $I(P, C \cap C')$ es el único número entero tal que:

(A1) $I(P, C \cap C')$ es nonegativo.

- (A2) $I(P, C \cap C') = 0$ es equivalente a que $P \notin C \cap C'$. El número $I(P, C \cap C')$ depende sólo de las componentes de C y C' que pasan por P , y $I(P, C \cap C') = 0$ si F o G es constante no cero.
- (A3) Si T es un cambio de coordenadas y $Q = T(P)$, entonces $I(P, C \cap C') = I(Q, T(C) \cap T(C'))$.
- (A4) $I(P, C \cap C') = I(P, C' \cap C)$.
- (A5) $I(P, C \cap C') \geq m_P m'_P$ donde m_P y m'_P son las multilicidades respectivas en el punto P , y la igualdad sucede si y sólo si C y C' no tienen tangentes comunes en P .
- (A6) Si $F = \Pi_i F_i^{r_i}$ y $G = \Pi_j G_j^{s_j}$ son factorizaciones de F y G , entonces $I(P, C \cap C') = \sum_{i,j} r_i s_j I(P, F_i \cap G_j)$.
- (A7) $I(P, C \cap C') = I(P, F \cap (G + AF))$ donde $A \in k[x, y, z]$ es arbitrario tal que $G + AF$ es homogéneo.

Este número de intersección local $I(P, C \cap C')$ existe, y está definido por la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(F, G)$ sobre k , donde $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)$ es la localización de $k[x, y]$ en el ideal que define a P . No veremos localización, así que sólo calcularemos con las propiedades (1) a (7).

Ejemplo 3.6. Sean $C = \{yz^{n-1} = x^n\}$, $C' = \{y = 0\}$, y $P = [0, 0, 1]$. Aplicamos (A7) para decir que

$$I(P, C \cap C') = I(P, (y) \cap (yz^{n-1} - x^n - z^{n-1}y)) = I(P, (y) \cap (x^n)).$$

Ahora por (A6) tenemos $I(P, (y) \cap (x^n)) = nI(P, (y) \cap (x))$, y por (A5) tenemos $I(P, (y) \cap (x)) = 1$. Así se concluye que $I(P, C \cap C') = n$. Hacer un dibujo!

Ejemplo 3.7. Sean $C = \{y^2z = x^3\}$, $C' = \{x = 0\}$, y $P = [0, 0, 1]$. Directamente por (A5) y (A6) tenemos que $I(P, C \cap C') = 2$. Notar que hay otro punto de intersección entre C y C' , el cual es $Q = [0, 1, 0]$. Luego por (A5) tenemos $I(Q, C \cap C') = 1$. Como no hay más puntos de intersección, tenemos que

$$C \cdot C' = 2 + 1 = 3.$$

Notar que los puntos de intersección son dos, pero uno de ellos se cuenta con multiplicidad 2.

Teorema 3.8. (*Teorema de Bézout*) Sean $C = \{F = 0\}$ y $C' = \{G = 0\}$ curvas planas de grados d y e sin componentes comunes. Entonces

$$C \cdot C' = de.$$

Demostración. La demostración se escapa de la complejidad del curso. Mirar la Sección 3 del Capítulo 5 de [Fult] para los detalles. \square

4. RECTAS Y CÓNICAS

Sea k un cuerpo arbitrario. Recordar que una recta L se define como

$$L = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}_k^2 : ax + by + cz = 0\}$$

donde $a, b, c \in k$ no son todos cero. Dos rectas distintas siempre se intersecan en un punto, y así no existen las rectas paralelas. Notar que dado $\lambda \in k$ no cero, tenemos que $ax + by + cz$ y $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz$ representan la misma recta. Esa simple observación nos define una biyección entre el conjunto de todas las rectas y \mathbb{P}_k^2 : simplemente $L = V(ax + by + cz) \mapsto [a, b, c]$. Esta es la **dualidad recta-punto** entre rectas de \mathbb{P}_k^2 y puntos de \mathbb{P}_k^2 .

Una cónica se define como

$$V(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz)$$

donde los coeficientes $a, b, c, d, e, f \in k$ no son todos cero. Al contrario de una recta, una cónica podría definir el conjunto vacío ya que el cuerpo k podría no ser adecuado. Por ejemplo, si $k = \mathbb{R}$, entonces $V(x^2 + y^2 + z^2) = \emptyset$. Lo mismo con las intersecciones. Por ejemplo, sobre $k = \mathbb{R}$, las cónicas $V(x^2 + y^2 - z^2)$ y $V(x^2 + y^2 - 2z^2)$ no se intersecan, pero si trabajamos sobre $k = \mathbb{C}$ si lo hacen. Estas cónicas se intersecan en los puntos $[1, i, 0]$ y $[1, -i, 0]$ cada uno con multiplicidad dos (verificarlo!).

Teorema 4.1. *Sea $k = \bar{k}$ y sea C una cónica. Entonces existe cambio de coordenadas T tal que $T(C)$ es una de las siguientes: $\{x^2 = 0\}$, $\{xy = 0\}$ o $\{xy + xz + yz = 0\}$.*

Demostración. Sea $C = V(F)$. Si F es reducible, entonces $F = R^2$ o $F = RR'$ donde R, R' representan polinomios de grado 1. En el primer caso, encontrar T tal que $R \mapsto x$, en el segundo buscar T tal que $R \mapsto x$ y $R' \mapsto y$.

Si F es irreducible, entonces mostrar que existen tres puntos no colineales P, Q, R en la cónica C . Luego encontrar cambio de coordenadas T tal que $T(P) = [0, 0, 1]$, $T(Q) = [0, 1, 0]$ y $T(R) = [1, 0, 0]$. Luego mostrar que la cónica $T(C)$ tiene la forma $axy + bxz + cyz$, para algunos a, b, c no nulos, ya que debe ser irreducible. Así se puede mostrar existencia de cambio de coordenadas T' tal que la imagen de $T(C)$ es finalmente $\{xy + xz + yz = 0\}$. □

Digamos que $k = \bar{k}$. Sea C una cónica definida por un F (de grado dos) irreducible, y sea $P \notin C$. ¿Cuántas rectas tangentes a C pasan por P ? Damos ahora la respuesta para $C = \{xy = z^2\}$ y $P = [0, 0, 1]$, y luego tú la adaptas para el caso general. Notar que todas las rectas que pasan por $[0, 0, 1]$ tienen la forma $\{ax + by = 0\}$. Digamos que $a \neq 0$. Entonces podemos asumir que la recta tiene la forma $\{x = ty\}$ donde $t \in k$. Luego reemplazamos en C , y nos queda

$$ty^2 = z^2.$$

Si la característica de k no es 2 y $t \neq 0$, entonces $x = ty$ no es tangente a C . Luego las únicas tangentes por P son $x = 0$ e $y = 0$. Si la característica de k es 2, entonces la ecuación $(\frac{x}{y})^2 = t$ tiene una única solución para cada t , con lo cual toda recta que pasa por P es tangente a C ! Fenómenos patológicos como este son comunes al trabajar con cuerpos de característica positiva. Para mucho más sobre cónicas, mirar Sección 1 del Capítulo 1 de [UAG].

Teorema 4.2. (Teorema de Pascal) Sea C una cónica irreducible. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in C$, y considerar las rectas: l_1 por P_1 y P_6 , l_2 por P_2 y P_4 , l_3 por P_3 y P_5 , m_1 por P_3 y P_4 , m_2 por P_1 y P_5 , y m_3 por P_2 y P_6 .

Entonces los puntos $l_1 \cap m_1$, $l_2 \cap m_2$, $l_3 \cap m_3$ son colineales.

Demostración. Digamos que los polinomios lineares que representan a l_i, m_j son l_i, m_j . Considerar la cúbica

$$F_t := l_1 l_2 l_3 + t m_1 m_2 m_3$$

donde t es un parámetro que determinaremos. Notar que P_1, \dots, P_6 están en $V(F_t)$. Sea $P \in C$ tal que $P \neq P_i$ para todo i . Luego podemos elegir $t_0 \in k$ tal que $P \in V(F_{t_0})$. Simplemente

$$t_0 := -\frac{l_1(P)l_2(P)l_3(P)}{m_1(P)m_2(P)m_3(P)}.$$

Notar que P no pertenece a las rectas l_i, m_j .

Luego $V(F_{t_0}) \cap C$ contiene al menos siete puntos. Pero, por el teorema de Bézout, tenemos que entonces C y F_{t_0} tienen factores comunes, y como C es irreducible, entonces $F_{t_0} = CL$, donde L es una recta, ya que F_{t_0} tiene grado 3.

Notar que $l_i \cap m_i \in V(F_{t_0})$ y $l_i \cap m_i \notin C$ para $i = 1, 2, 3$. Luego debemos tener que $l_i \cap m_i \in L$ para $i = 1, 2, 3$, y así esos tres puntos son colineales. \square

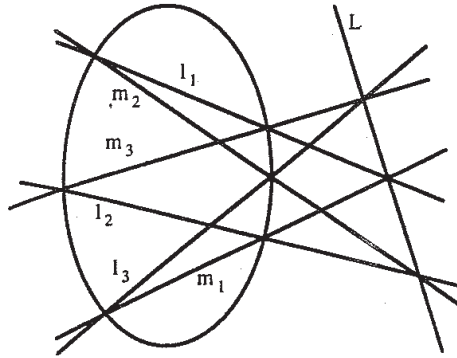


FIGURA 3. Teorema de Pascal para $k = \mathbb{R}$ y una elipse.

Observar que este teorema funciona para $k = \mathbb{R}$. Por ejemplo, puedes tomar una circunferencia, o una elipse, o una hipérbola, y obtienes el mismo resultado. Tú puedes demostrar usando el teorema de Pascal que, por ejemplo, los puntos que determinan lados opuestos a un hexágono inscrito en una elipse son colineales. En particular, para una circunferencia.

Corolario 4.3. (*Teorema de Pappus*) Considerar rectas L y L' como en la Figura 4, donde $A, B, C \in L$ y $A', B', C' \in L'$. Entonces los puntos P, Q, R son colineales.

Demostración. Tarea. Adaptar la demostración del teorema de Pascal para $C = LL'$ y usar como punto especial $L \cap L'$. \square

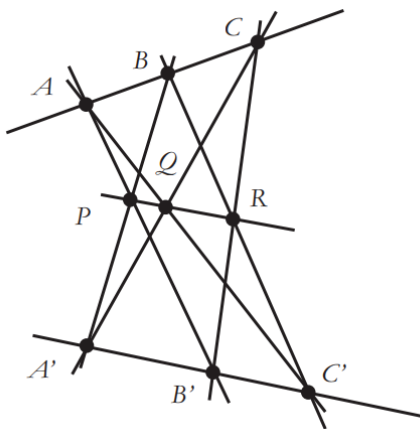


FIGURA 4. Teorema de Pappus para $k = \mathbb{R}$

Usando la dualidad punto-recta de \mathbb{P}_k^2 y la imagen bajo esa dualidad de una cónica (lo cual es otra cónica), se puede demostrar el teorema de Brianchon a través del teorema de Pascal: Si $ABCDEF$ es un hexágono formado por seis rectas tangentes de una cónica, entonces las rectas AD , BE , CF son concurrentes, es decir, se intersectan en un solo punto.

También es posible “deformar” la situación del teorema de Pascal, encontrando verdades geométricas tales como la siguiente. Sean $ABCD$ puntos en una circunferencia \mathcal{C} . Sean L, L' rectas tangentes a \mathcal{C} en A y D respectivamente. Luego los puntos $L \cap L'$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$ son colineales. ¿Puedes demostrarlo usando un argumento similar al del teorema de Pascal? ¿Puedes encontrar otras verdades geométricas a partir de las ideas del teorema de Pascal?

5. CONFIGURACIONES DE RECTAS I: EJEMPLOS Y COMBINATORIA

De ahora en adelante nos concentraremos sólomente en rectas en el plano proyectivo \mathbb{P}_k^2 . La idea es estudiar configuraciones finitas de rectas, mostrando propiedades básicas, otras más profundas, y por último plantear algunos problemas abiertos. Algunas referencias sobre configuraciones de rectas y algunas aplicaciones son [Hirz83],[Tr16], [EFU].

Sea k un cuerpo arbitrario.

Definición 5.1. Una **configuración de rectas** \mathcal{A} es una colección finita de rectas en \mathbb{P}_k^2 . Para $m \geq 2$, un **m-punto** es un punto contenido en exactamente m rectas de \mathcal{A} . Denotamos por t_m el número de m -puntos.

Una configuración de rectas se dice en **posición general** si $t_m = 0$ para $m > 2$ (es decir, posee sólo 2-puntos). Una configuración de rectas se dice **trivial** si todas sus rectas concurren a un punto, y se dice **cuasi-trivial** si todas excepto una recta concurren a un punto.

Notar que una configuración de d rectas \mathcal{A} estará definida por un polinomio homogéneo F de grado d el cual se factoriza completamente en d polinomios de grado 1 distintos. De esta forma, tendremos $\mathcal{A} = V(F)$ como conjunto algebraico.

Ejemplo 5.2. Configuraciones de rectas en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ son precisamente las que pueden ser dibujadas en el pizarrón. Cada configuración de rectas particiona $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ en polígonos. (Debes contar también los polígonos “no acotados” hacia el infinito.) Si todos los polígonos son triángulos, entonces la configuración se llama **simplicial**. Hay una enorme literatura sobre configuraciones simpliciales (mirar por ejemplo [Gr05]). Estas no han sido clasificadas aún. La Figura 5 muestra dos ejemplos de configuraciones simpliciales extremas, donde las rectas visualmente paralelas se intersectan en el infinito.

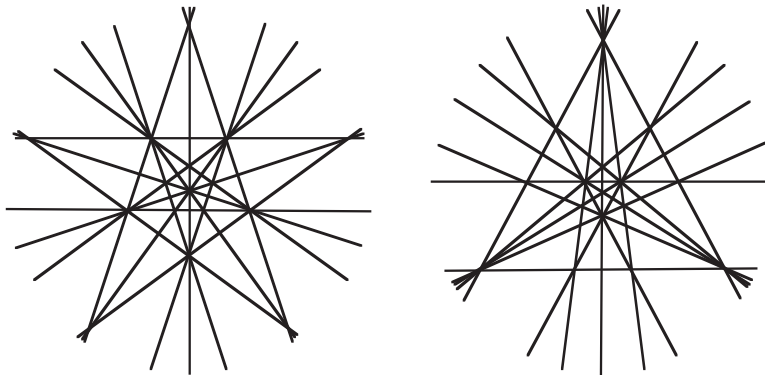


FIGURA 5. Configuraciones simpliciales.

La configuración de la portada de estas notas es simplicial, y está formada por 37 rectas (incluir recta en el infinito) con $t_2 = t_3 = 72$, $t_4 = 12$, $t_5 = 24$ y $t_{12} = 1$. Otro ejemplo más simple es el **cuadrilátero completo**, la cual se define con los ceros de $xyz(x-y)(x-z)(y-z)$. Es una configuración con $d = 6$ rectas, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, $t_m = 0$ para todo otro m (Hacer el dibujo!). Polígonos regulares definen familias de configuraciones simpliciales: Considerar todas las rectas dadas por los lados de un polígono regular de n lados y las n rectas correspondientes a los ejes de simetría del polígono. Luego tenemos una configuración con $d = 2n$ rectas, $t_2 = n$, $t_3 = \frac{n(n-1)}{2}$, $t_n = 1$, $t_m = 0$ para otros m (mirar por ejemplo [Hirz83, 1.1]).

Ejemplo 5.3. Sea $n \geq 4$. Entonces los ceros de

$$(x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n)$$

en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ definen una configuración de $3n$ rectas con $t_3 = n^2$, $t_n = 3$, y $t_m = 0$ para $m \neq 3, n$. Las llamaremos **configuraciones de Ceva**. Para $n = 3$, el polinomio $(x^3 - y^3)(x^3 - z^3)(y^3 - z^3)$ define la **configuración dual de Hesse** la cual tiene 9 rectas, $t_3 = 12$, y $t_m = 0$ si $m \neq 3$. La **configuración de Hesse** está formada por las 12 rectas que contienen los 9 puntos de inflexión de una cúbica nosingular en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Resulta que todas las configuraciones de Hesse son proyectivamente equivalentes, es decir, dada dos existe un cambio de coordenadas enviando una en la otra. La dualidad punto-recta de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ aplicada a los nueve 3-puntos de la configuración de Hesse nos entrega la configuración dual de Hesse.

Ejemplo 5.4. Sea $k = \mathbb{F}_{p^n}$ para algún primo p y entero $n > 0$. El conjunto de las $p^{2n} + p^n + 1$ rectas en \mathbb{P}_k^2 forma una configuración con $t_{p^n+1} = p^{2n} + p^n + 1$, y $t_m = 0$ si $m \neq p^n + 1$. La llamaremos **configuración del plano proyectivo finito**. Para $p = 2$ y $n = 1$ tenemos la **configuración de Fano** dada por 7 rectas con siete 3-puntos.

Notar que en los ejemplos de arriba tenemos que cuando $k = \mathbb{R}$ entonces $t_2 > 0$. Pero si $k \neq \mathbb{R}$, entonces hay ejemplos donde $t_2 = 0$. Eso no es una casualidad.

Teorema 5.5. (*Teorema de Sylvester-Gallai*) Si $k = \mathbb{R}$ y \mathcal{A} es una configuración no trivial, entonces $t_2 > 0$.

Demostración. Esta demostración elegante está en [Proofs]. Primero usamos la dualidad punto-recta para escribir un enunciado equivalente: “Para todo conjunto de puntos no colineales, existe una recta que pasa por exactamente dos de ellos”. Sea \mathcal{P} el conjunto de puntos no colineales, y sea \mathcal{L} el conjunto de rectas que pasan al menos por dos de ellos. Así \mathcal{L} es un conjunto finito. Dentro de todos los pares (P, L) con $P \in \mathcal{P}$, $L \in \mathcal{L}$ y $P \notin L$ (hay un número finito de tales pares, y hay tales pares por la condición de no colinealidad), elegir un par (P_0, L_0) tal que la distancia entre P_0 y L_0 sea la más pequeña entre todos los pares. Luego L_0 debe sólo contener dos puntos de \mathcal{P} . Sino, contiene al menos 3 puntos. Sea Q el punto de intersección de

la perpendicular a L por P_0 . Luego, dos de estos tres puntos deben estar a la derecha o a la izquierda de Q . Sean estos puntos P_1 y P_2 tal que P_2 está más lejos de Q que P_1 . Sea L' la recta que pasa por P_0 y P_2 . Luego (P_1, L') contradice la elección de (P_0, L_0) , a través de un argumento muy sencillo de geometría Euclidiana (dibújalo y demuéstalo!). De esta forma, L_0 debe contener exactamente dos puntos. \square

En la próxima sección veremos que en realidad tenemos algo mejor: $t_2 \geq 3$.

Sea nuevamente k un cuerpo arbitrario. Lo siguiente es una verdad puramente combinatorial, la cual no involucra al cuerpo k .

Proposición 5.6. *Para toda configuración de rectas se tiene que*

$$\binom{d}{2} = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} t_m.$$

Demostración. Tarea. Se demuestra contando a la izquierda pares de rectas, y a la derecha pares de rectas pero de una forma distinta. \square

Otro teorema general es el siguiente, el cual es casi puramente combinatorial. El teorema está esencialmente en [deBrEr48], lo cual es puramente combinatorial. La parte novedosa y sobre k es clasificar el caso de igualdad (ver [EFU]).

Teorema 5.7. *Toda configuración \mathcal{A} no trivial de d rectas satisface*

$$\sum_{m \geq 2} t_m \geq d.$$

Se tiene igualdad si y sólo si \mathcal{A} es cuasi-trivial o una configuración del plano proyectivo finito.

Demostración. Sólomente mostraremos la desigualdad. Para el resto mirar [EFU, Theorem 2.7]. Etiquetemos todos los m -puntos de \mathcal{A} del 1 al $r = \sum_{m \geq 2} t_m$, y las rectas del 1 al d . Definamos

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si la recta } j \text{ contiene al punto } i \\ 0, & \text{sino.} \end{cases}$$

Sea L_j el vector $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq r}$. Queremos demostrar que $\{L_1, \dots, L_d\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en \mathbb{Q}^r , ya que eso implicaría $r \geq d$. Suponer lo contrario. Sin pérdida de generalidad, digamos que $L_1 = \sum_{j=2}^d x_j L_j$ para algunos $x_j \in \mathbb{Q}$. Luego, usando el producto punto usual de \mathbb{Q}^r , tenemos que

$$x_j = \frac{L_1 \cdot L_1 - 1}{1 - L_j \cdot L_j} < 0$$

para todo $j > 1$. Pero las coordenadas de L_1 son 1 o 0, y así es imposible que todo x_j sea negativo. Luego el conjunto es linealmente independiente. \square

6. CONFIGURACIONES DE RECTAS II: NÚMEROS DE CHERN Y
GEOGRAFÍA

Definición 6.1. Sea \mathcal{A} una configuración de d rectas. Se definen los números enteros

$$\bar{c}_1^2(\mathcal{A}) = 9 - 5d + \sum_{m \geq 2} (3m - 4)t_m \quad \text{y} \quad \bar{c}_2(\mathcal{A}) = 3 - 2d + \sum_{m \geq 2} (m - 1)t_m.$$

Se llamarán *números de Chern* de \mathcal{A} .

Notar que los números de Chern son invariantes bajo cambio de coordenadas. Estos invariantes no son números combinatoriales arbitrarios, provienen de la teoría de superficies algebraicas a través de sus diferenciales y sus clases de Chern. Como ya hemos dicho, nosotros no tocaremos esa tecnología en este mini-curso, así que para nosotros serán las fórmulas de la definición. A pesar de su arbitrariedad, mostraremos que los números de Chern satisfacen varias propiedades generales.

Proposición 6.2. Si \mathcal{A} es tal que $t_d = t_{d-1} = 0$, entonces sus números de Chern son positivos.

Demostración. Notar que $t_d = t_{d-1} = 0$ implica que \mathcal{A} no es trivial o cuasi-trivial. En el caso cuasi-trivial tenemos $\bar{c}_1^2 = \bar{c}_2 = 0$. Suponer $d = 4$. Entonces \mathcal{A} tiene sólo 2-puntos y calculamos $\bar{c}_1^2(\mathcal{A}) = 1$ y $\bar{c}_2(\mathcal{A}) = 1$. Ahora usaremos inducción sobre el número de rectas d . Asumir que \mathcal{A} tiene $d + 1 \geq 5$ rectas, y sea $L \in \mathcal{A}$ una recta pasando por $t \geq 3$ puntos (debe existir tal recta por la hipótesis). La configuración $\mathcal{A} \setminus L$ no es trivial, y así

$$\bar{c}_1^2(\mathcal{A}) = \bar{c}_1^2(\mathcal{A} \setminus L) - 5 + 3t \geq \bar{c}_1^2(\mathcal{A} \setminus L) + 4 \geq 1$$

y

$$\bar{c}_2(\mathcal{A}) = \bar{c}_2(\mathcal{A} \setminus L) - 2 + t \geq \bar{c}_2(\mathcal{A} \setminus L) + 1 \geq 1.$$

□

Proposición 6.3. (see [So84, Theorem (5.1)]) Sea \mathcal{A} configuración de d rectas tal que $t_d = t_{d-1} = 0$. Entonces,

$$\frac{2d - 6}{d - 2} \leq \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} \leq 3.$$

Se tiene igualdad a la izquierda ssi $t_2 = \binom{d}{2}$ (es decir, \mathcal{A} es una configuración con rectas en posición general), y se tiene igualdad a la derecha ssi $\sum_{m \geq 2} t_m = d$ (y así \mathcal{A} es una configuración plano proyectivo finito).

Demostración. La desigualdad a la izquierda es equivalente a

$$0 \leq (d - 2)\bar{c}_1^2 - (2d - 6)\bar{c}_2 = \sum_{m \geq 2}^{d-2} t_m (-m^2 + m(1 + d) + (2 - 2d))$$

pero $-m^2 + m(1 + d) + (2 - 2d) \geq 0$ para todo $2 \leq m \leq d - 1$. Más aun, tenemos $-m^2 + m(1 + d) + (2 - 2d) > 0$ para todo $3 \leq m \leq d - 2$ y por hipótesis $t_d = t_{d-1} = 0$. Esto demuestra la primera desigualdad.

La desigualdad de la derecha es equivalente a demostrar que

$$\bar{c}_1^2 - 3\bar{c}_2 = d - \sum_{m \geq 2} t_m \leq 0,$$

y esto es lo que demostramos, junto con clasificar la igualdad, en el Teorema 5.7. \square

El **problema de geografía** es: Dados dos enteros (A, B) , mostrar que existe configuración \mathcal{A} tal que $\bar{c}_1^2(\mathcal{A}) = A$ y $\bar{c}_2(\mathcal{A}) = B$. Este problema podría ser muy difícil, y así nos concentraremos en qué podemos decir sobre la **pendiente de Chern** $\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2}$. Este problema de geografía es análogo a los problemas de geografía de superficies de tipo general (mirar el clásico [P87] y buscar en la literatura todo lo que se ha hecho desde entonces).

Resulta que el problema de geografía depende notablemente de k , como queda ejemplificado en el siguiente teorema.

Teorema 6.4. *Sea \mathcal{A} una configuración de d rectas con $t_d = t_{d-1} = 0$.*

- (1) *Si $k = \mathbb{R}$, entonces $\bar{c}_1^2 \leq \frac{5}{2}\bar{c}_2$. Igualdad se alcanza ssi \mathcal{A} es simplicial (mirar Ejemplo 5.2).*
- (2) *Si $k = \mathbb{C}$, entonces $\bar{c}_1^2 \leq \frac{8}{3}\bar{c}_2$. Igualdad se alcanza ssi \mathcal{A} es la configuración dual de Hesse (mirar Ejemplo 5.3).*

Demostración. (1) Haremos uso de topología a través de la característica de Euler. Sea $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_d\}$ una configuración en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Entonces \mathcal{A} define una pavimentación de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ en polígonos. Sea p_k el número de polígonos con k lados. Luego $p_2 = 0$ ya que \mathcal{A} no es la configuración trivial. Sean f_0 el número de vértices de la pavimentación, f_1 el número de segmentos, y f_2 el número de polígonos. Luego como la característica topológica de Euler de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ es 1, podemos escribir

$$f_0 - f_1 + f_2 = 1.$$

Por otro lado, no es difícil verificar que $f_0 = \sum_{m \geq 2} t_m$, $f_1 = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 2} 2mt_m = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 2} mp_m$, y $f_2 = \sum_{m \geq 2} p_m$. Así podemos evaluar en la expresión de arriba para obtener

$$\sum_{m \geq 2} (m-3)p_m = -3 - \sum_{m \geq 2} (m-3)t_m.$$

Notar que el lado izquierdo de la ecuación es siempre mayor o igual que cero, con lo cual obtenemos $t_2 \geq 3$, lo cual fue prometido en la sección anterior.

(2) Esta desigualdad proviene de las profundidades de la teoría de superficies algebraicas, su demostración escapa enormemente del marco del minicurso. Es esencialmente la desigualdad de Hirzebruch-Sakai [Hirz83], la cual proviene de la famosa desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau de superficies complejas. Mirar [Hirz83], [Tr16, Chapter 4], [So84, Theorem 5.3]. La caracterización de la igualdad no es demasiado complicada. Debes primero

mostrar que $t_2 + \frac{1}{4} \geq 3$ usando la desigualdad en [Hirz83], y luego mostrar que igualdad implica $t_2 + \frac{1}{4} = 3$ e ir caso por caso. \square

Super desafío: Encontrar una demostración alternativa, ojalá elemental, de la desigualdad (2) del teorema anterior.

Lo que nos interesa ahora es: ¿Qué se puede decir sobre la distribución de $\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2}$ en el intervalo $[1, 3]$? Por supuesto, como ya hemos visto, esto dependerá del cuerpo k . Los resultados a continuación provienen de [EFU]. En particular, nos interesan los puntos de acumulación de $\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2}$ en $[1, 3]$.

Corolario 6.5. *Si r es un punto de acumulación de pendientes de Chern $\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2}$, entonces $r \in [2, 3]$.*

Demostración. Sabemos que $1 \leq \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} \leq 3$. Notamos que tenemos una cantidad finita de posibilidades combinatoriales para configuraciones de rectas después de fijar el número de rectas, y así una cantidad finita de pendientes de Chern. Sea $s < 2$, entonces $s > \frac{2d-6}{d-2}$ sólo para un número finito de d . Pero, por Proposición 6.3, sabemos que $\frac{2d-6}{d-2} \leq \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2}$, y así las pendientes de Chern no se pueden acumular en s . \square

Lema 6.6. *(Lema de densidad) Sea k un cuerpo infinito. Sea \mathcal{A} una colección de $l(n)$ rectas con $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} = c > 2$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} l(n) = \infty$. Asumir que existe $h \in]1, 2]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{c}_1^2}{l(n)^h} = a > 0$. Entonces el conjunto de las pendientes de Chern de las configuraciones definidas sobre k es denso en $[2, c]$.*

Demostración. Es elemental, mirar [EFU, Lemma 4.2]. \square

Corolario 6.7. *El conjunto de los puntos de acumulación de las pendientes de Chern sobre $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ es el intervalo $[2, 3]$.*

Demostración. Usar el Lema 6.6 para la colección \mathcal{A}_n de configuraciones de planos proyectivos finitos (Ejemplo 5.4), donde $l(n) = p^{2n} + p^n + 1$. Aquí $c = 3$ y usamos $h = \frac{3}{2}$. \square

Corolario 6.8. *El conjunto de puntos de acumulación de las pendientes de Chern de configuraciones definidas sobre \mathbb{R} es el intervalo $[2, \frac{5}{2}]$.*

Demostración. Simplemente usar Lema 6.6 para la colección \mathcal{A}_n de configuraciones de $2n$ rectas definidas por polígonos regulares de n lados (mirar Ejemplo 5.2). Aquí $c = \frac{5}{2}$ y tomamos $h = 2$. \square

7. ALGUNOS PROBLEMAS SOBRE CONFIGURACIONES DE RECTAS

En la Sección 6 vimos que las pendientes de Chern son densas en $[2, \frac{5}{2}]$ cuando $k = \mathbb{R}$, y sabemos que ese resultado es óptimo. Notemos que en la demostración usamos configuraciones de rectas definidas por polígonos regulares, y así no están definidas sobre \mathbb{Q} salvo unos pocos casos. Esto porque toda realización de tal configuración está definida sobre un cuerpo estrictamente más grande que \mathbb{Q} . Mirar [Cun11, Theorem 3.6] para los detalles. Así no es claro el intervalo de densidad sobre \mathbb{Q} . Con respecto a pendientes de Chern, la más grande de la cual sabemos está dada por el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1. Para $n \geq 3$, considerar las rectas $\{y = \alpha z/2\}$, $\{x = \alpha z/2\}$, $\{y = x + (\beta - n + 1)z\}$, y $\{y = -x + (\beta + 1)z\}$, con α y β toman valores en todos los enteros no negativos hasta $2n$ y $2n - 2$, respectivamente. Así esta configuración se ve como un arreglo de $n \times n$ triángulos rectángulos representados por $8n$ rectas. Se puede pensar que cuando $n = \infty$ obtenemos una configuración simplicial infinita de \mathbb{R}^2 con sólo triángulos rectángulos isósceles. Para un n fijo, tenemos que $t_2 = 6n^2 + 6n - 8$, $t_3 = 2n^2 - 6n + 8$, $t_4 = 2n^2 + 2n - 3$, $t_{2n-1} = 2$ y $t_{2n+1} = 2$. De esta forma, la pendiente de Chern es

$$\frac{38n^2 - 18n - 7}{16n^2 - 8n - 2},$$

la cual converge a 2.375 cuando n tiende a ∞ .

Por el Lema 6.6 y el Ejemplo 7.1 obtenemos que sobre \mathbb{Q} cualquier $r \in [2, 2.375]$ es un punto de acumulación de pendientes de Chern. Se cree que deberían haber puntos de acumulación arbitrariamente cerca de 2.5, con lo cual se conjetura lo siguiente.

Conjetura 7.2. *El conjunto de los puntos de acumulación de las pendientes de Chern sobre $k = \mathbb{Q}$ es $[2, \frac{5}{2}]$.*

Desafío: Encontrar familia de configuraciones sobre \mathbb{Q} la cual define un punto de acumulación mayor a 2.375. ¿Será posible modificar Ejemplo 7.1 para encontrar tal configuración?

¿Qué sucede para configuraciones sobre los números complejos? Tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 7.3. *El conjunto de puntos de acumulación de pendientes de Chern para $k = \mathbb{C}$ es $[2, \frac{5}{2}]$.*

Desafío: Demostrarlo o encontrar un contraejemplo, es decir, algún punto de acumulación estrictamente mayor a $\frac{5}{2}$. No ha habido mucho trabajo al respecto.

Usaremos ahora el Nullstellensatz de Hilbert para mostrar: Dada una configuración \mathcal{A} sobre \mathbb{C} , entonces existe una configuración \mathcal{A}' sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ la cual posee los mismos números combinatoriales que \mathcal{A} , y así los mismos números

de Chern. Luego comprender configuraciones sobre \mathbb{C} es equivalente a entenderlas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. La razón es: Dada una configuración de d rectas, podemos usar sus coeficientes como variables, y determinantes de 3×3 igual a cero en esos coeficientes para describir concurrencias de rectas. Para decir que rectas no concurren, se introducen nuevas variables para multiplicar esos determinantes e igualarlos a 1. Notar que este sistema de ecuaciones polinomiales tiene coeficientes $\{0, 1\} \subset \mathbb{Q}$ y define a todos los arreglos de rectas con incidencia fija. Luego si ese conjunto algebraico afín tiene un punto en \mathbb{C} , significa que hay una configuración sobre \mathbb{C} con esa incidencia. Luego por el teorema de los ceros de Hilbert, existe un punto en $\overline{\mathbb{Q}}$ ya que el correspondiente ideal no puede ser todo $\overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$, y así una configuración de rectas sobre $k = \overline{\mathbb{Q}}$ con la misma incidencia de la configuración sobre \mathbb{C} .

Aparte de los problemas sobre geografía de pendientes de Chern, existen muchos otros problemas abiertos que involucra o directamente sobre configuraciones de rectas. Un ejemplo sencillo de conexión: Existe una relación directa entre geografía de configuraciones de rectas y lo que se llama constantes lineales de Harbourne (ver [BDHH15]), las cuales se introdujeron para estudiar la conjetura de la negatividad acotada en superficies algebraicas. Las *H-constantes lineales* de una configuración de rectas \mathcal{A} se define como $H_L(\mathcal{A}) := \frac{d^2 - \sum_{m \geq 2} m^2 t_m}{\sum_{m \geq 2} t_m}$, o equivalentemente

$$H_L(\mathcal{A}) = \frac{3 - (\bar{c}_1^2 - 2\bar{c}_2)}{d - (\bar{c}_1^2 - 3\bar{c}_2)} - 2.$$

En [EFU], demostramos que los puntos de acumulación de \bar{c}_1^2/\bar{c}_2 están en correspondencia uno a uno con los puntos de acumulación de H_L . Para detalles mirar [EFU], son demostraciones elementales.

Terminaremos este mini-curso con un problema no relacionado con geografía. Nuestras referencias serán [U10] y [KNP15]. Primero definiremos ciertas configuraciones de rectas especiales.

Definición 7.4. Sea $p \geq 3$ un número entero. Una **p-net** en \mathbb{P}_k^2 es una $p + 1$ -tupla $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p, \mathcal{X})$, donde cada \mathcal{A}_i es una configuración de rectas en \mathbb{P}_k^2 y \mathcal{X} es un conjunto finito de puntos en \mathbb{P}_k^2 , los cuales satisfacen las condiciones:

- (1) \mathcal{A}_i y \mathcal{A}_j no contienen rectas comunes si $i \neq j$.
- (2) El punto de intersección entre una recta en \mathcal{A}_i y una recta en \mathcal{A}_j pertenece a \mathcal{X} para $i \neq j$.
- (3) Por cada punto de \mathcal{X} existe exactamente una recta en \mathcal{A}_i que lo contiene, para cada i .

Se puede demostrar fácilmente que $|\mathcal{A}_i| = |\mathcal{A}_j|$ para todo i, j y $|\mathcal{X}| = |\mathcal{A}_1|^2$. Denotaremos $|\mathcal{A}_j|$ por q , y será llamado el grado de la net. Usaremos la notación **(p,q)-net** para una p -net de grado q . Etiquetamos las rectas en \mathcal{A}_i por $\{L_{q(i-1)+j}\}_{j=1}^q$ para todo i , y así definimos la configuración $\mathcal{A} = \{L_1, L_2, \dots, L_{pq}\}$.

Ejemplo 7.5. Toda configuración en Ejemplo 5.3 define una net. Si la configuración son los ceros de $(x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n)$, entonces estamos hablando de una $(3, n)$ -net. Tomamos $\mathcal{A}_1 = \{x^n - y^n = 0\}$, $\mathcal{A}_2 = \{y^n - z^n = 0\}$, $\mathcal{A}_3 = \{x^n - z^n = 0\}$ y $\mathcal{X} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. La configuración de Hesse (en Ejemplo 5.3) es una $(4, 3)$ -net, la cual está compuesta de cuatro triángulos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ los cuales se intersectan en los doce 4-puntos de la configuración. Para una descripción concreta mirar [U10, Example 3.1].

Asumir por ahora que trabajamos sobre $k = \bar{k}$. Una (p, q) -net $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p, \mathcal{X})$ nos define lo que se llama un **pencil de curvas** de grado q en \mathbb{P}_k^2 . Tomar \mathcal{A}_i y \mathcal{A}_j con $i \neq j$ y considerar el pencil de curvas

$$\{u\mathcal{A}_i + v\mathcal{A}_j : [u, v] \in \mathbb{P}_k^1\}$$

donde tomamos \mathcal{A}_i como el polinomio que la define. Sea F una curva de grado q la cual pasa por los q^2 puntos de \mathcal{X} . Tomar un punto Q en $F \setminus \mathcal{X}$. Entonces existe $[u, v] \in \mathbb{P}_k^1$ tal que $u\mathcal{A}_i(Q) + v\mathcal{A}_j(Q) = 0$. Luego, por el teorema fundamental de Noether (ver Sección 5 del Capítulo 5 de [Fult]), tenemos $a \in k$ tal que $F = au\mathcal{A}_i + av\mathcal{A}_j$. Luego cada F de grado q que pasa por \mathcal{X} es parte del pencil. En particular, esto es válido para los otros miembros de la (p, q) -net \mathcal{A} . En decir, el pencil tiene al menos p miembros los cuales son curvas completamente reducibles. Este pencil da lugar a una fibración especial de curvas luego de reventar los puntos en \mathcal{X} .

El problema es clasificar (p, q) -nets para un k dado. Antes de clasificar, no gustaría saber si al menos existen (p, q) -nets para pares (p, q) arbitrarios. Nets en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tienen la siguiente restricción, la cual se deduce de propiedades topológicas de la fibración especial de curvas explicada en el párrafo anterior. Para esto se usa la característica de Euler de la fibración, es decir, tenemos una restricción topológica tal como pasó anteriormente con configuraciones de rectas sobre \mathbb{R} .

Proposición 7.6. *Una (p, q) -net en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ satisface $(p = 3, q \geq 2)$ o $(p = 4, q \geq 3)$ o $(p = 5, q \geq 6)$.*

En efecto, tenemos familias infinitas con parámetros de $(3, q)$ -nets en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ (por ejemplo mirar [U10]). Para $p = 5$ se puede demostrar que no existen (p, q) -nets en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Para una demostración muy elemental mirar [KNP15]. El mismo artículo [KNP15] muestra que para específicos e infinitos q , no existen $(4, q)$ -nets en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Conjetura 7.7. *La única $(4, q)$ -net en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es la definida por la configuración de Hesse. En particular q debe ser 3.*

Desafío: Mostrar que la conjetura es cierta. Quizás extrapolando los métodos de [KNP15] se puede lograr algo. En caso contrario, encontrar un contraejemplo.

8. EJERCICIOS

1. Identifique cuales de los siguientes conjuntos son algebraicos y cuales no. Justificar en ambos casos.
 - a) $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} V(nx^{11} + (n+1)y^7 - xy + (2n+1))$.
 - b) $\{(\sin(u), \cos(u), v) : (u, v) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.
 - c) $\{(t \cos(t), t \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
 - d) $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
 - e) $\{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$.
 - f) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1$.
 - g) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. Sea k un cuerpo arbitrario.
 - a) Sean $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. Mostrar que $V(fg) = V(f) \cup V(g)$.
 - b) Mostrar que la unión finita de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.
3. Una **parametrización** de una curva plana irreducible $V(f(x, y))$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ es la existencia de funciones racionales $x(t), y(t) \in \mathbb{C}(t)$ no constantes tales que

$$f(x(t), y(t)) = 0$$

en $\mathbb{C}(t)$.

- a) Muestre que toda recta es parametrizable.
 - b) Muestre que toda cónica es parametrizable.
 - c) Muestre que las cúbicas $V(y^2 - x^3)$ y $V(y^2 - x^2(x+1))$ son ambas parametrizables.
 - d) (Desafío) Muestre que la cúbica $V(y^2 - x(x+1)(x+\lambda))$ **no** es parametrizable si $\lambda \neq 0, 1$. (Mirar [UAG].)
4. Encontrar un criterio que permita decidir cuándo la cónica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

es irreducible, en función de las constantes A, B, C, D, E, F .

5. Mostrar que no existe cónica irreducible en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ sean rectas tangentes en $[0, 0, 1]$ y $[1, 0, 0]$ respectivamente.
6. Sea $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ una cónica tal que $P = [0, 0, 1] \in C$, y P es un punto singular. Demostrar que C está compuesta por una o dos rectas.
7. Encuentre cada una de las intersecciones entre $C = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ y $C' = \{x^2 + y^2 - 4z^2 = 0\}$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con sus respectivos números de intersección. ¿Qué sucede con las intersecciones en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$?
8. Encuentre cada una de las intersecciones entre $C = \{zy^2 = x^2(x+z)\}$ y $C' = \{yz = x^2\}$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con sus respectivos números de intersección. Dibuje las curvas en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.
9. Sean F, G dos cónicas sin componentes comunes en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ intersectándose en 4 puntos distintos. Sea H una cónica que contiene a estos 4 puntos. Mostrar que entonces existen $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $H = aF + bG$.

10. Encuentre una curva de grado 3 que contenga a todos los puntos de intersección entre $C = V(x^3 + y^3 + z^3)$ y $C' = V(xy + xz + yz)$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ pero que no sea igual a C o a C' .
11. Encontrar ecuaciones explícitas para mostrar que cada una de las intersecciones de cónicas en la Figura 2 de los apuntes es posible. Para eso, centrarse en $[0, 0, 1]$ y así en la carta afín U_z , y tomar cónicas tangentes de la forma

$$F_i = a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 + y = 0$$

con $i = 1, 2$. Luego la intersección de F_1 y F_2 en $(0, 0)$ se puede reducir por el axioma 7 a la intersección de F_1 con $F_1 - F_2$, esta última representa dos rectas! Si ambas son $y = 0$ (i.e. $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$), entonces la multiplicidad en $(0, 0)$ es 4. Si una es $y = 0$ y la otra no, entonces la multiplicidad en $(0, 0)$ es 3, etc. Por ejemplo la circunferencia

$$x^2 + (y + 1)^2 = 1$$

se interseca con la elipse

$$4x^2 + (4y + 1)^2 = 1$$

sóloamente en $(0, 0)$, y así con multiplicidad 4.

12. a) Mostrar que si $V' \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ es un conjunto algebraico infinito, entonces $V' = V(F)$ para algún polinomio $F \in \mathbb{R}[x, y]$.
 b) Mostrar que si $V(F)$ interseccionado con todas las rectas verticales y horizontales da un punto, entonces $V(F)$ debe ser una recta.
 c) Mostrar que $\{(t, e^t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ no es un conjunto algebraico.
13. Sea C una circunferencia en $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, y sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en C tal que sus lados opuestos no son paralelos. Mostrar que las tres intersecciones de los tres pares de rectas de lados opuestos son colineales. Deducir teoremas para los casos que tengamos lados paralelos.
14. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en una circunferencia. Asumir que \overline{AB} es paralelo a \overline{ED} , y que \overline{BC} es paralelo a \overline{EF} . Demostrar que \overline{FA} es paralelo a \overline{CD} .
15. Sean $ABCD$ puntos en una circunferencia \mathcal{C} . Sean L, L' rectas tangentes a \mathcal{C} en A y D respectivamente. Demostrar que los puntos $L \cap L'$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$ son colineales.
16. a) Dibuje una configuración simplicial de 8 rectas, indicando todos los triángulos (incluidos al infinito). Calcular los t_m .
 b) Dibuje una configuración **no** simplicial de 8 rectas, indicando todos los polígonos (incluidos al infinito). Calcular los t_m .
17. Demuestre que una configuración simplicial de 5 rectas debe ser cuasi-trivial.
18. Encontrar todas las configuraciones simpliciales de 6 rectas.

19. Demuestre que una configuración simplicial de 5 rectas debe ser cuasi-trivial.
20. Encontrar explícitamente todos los m -puntos de la configuración de 6 rectas $xyz(x-y)(x-z)(y-z) = 0$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ indicando su multiplicidad.
21. Encontrar todos los m -puntos de una configuración de Ceva $\{(x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n) = 0\}$. Dualizando para $n = 3$, encontrar la configuración de Hesse.
22. Demostrar el argumento de geometría Euclidiana al final de la demostración del Teorema de Sylvester-Gallai.
23. Sea $\{\mathcal{A}_{d_n}\}$ una colección infinita de configuraciones de d_n rectas con $d_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Asumir que no son triviales ni cuasi-triviales. Mostrar que $\bar{c}_2(\mathcal{A}_{d_n}) \rightarrow \infty$.
24. Encontrar todos los puntos múltiples de la configuración de Ceva.
25. Dualizando, encontrar la configuración de 12 rectas de Hesse.
26. Clasificar configuraciones de rectas con $\frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} < \frac{3}{2}$.
27. Mostrar que si \mathcal{A} es una configuración no trivial ni cuasi-trivial de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y $\bar{c}_1^2(\mathcal{A}) = \frac{8}{3}\bar{c}_2(\mathcal{A})$, entonces \mathcal{A} es la configuración dual de Hesse.
28. Dibujar la configuración en Ejemplo 7.1. Verificar la numerología.

REFERENCIAS

- Proofs. M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from The Book*, Sixth edition. Springer, Berlin, 2018.
- Art. M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- AtMac. M. F. Atiyah, L. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969. <http://www.math.toronto.edu/jcarlson/A-M.pdf>.
- BDHH15. T. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, J. Huizenga, A. Lundman, P. Pokora, T. Szemberg, *Bounded Negativity and Arrangements of Lines*, International Mathematics Research Notices, Volume 2015, Issue 19, 9456–9471.
- deBrEr48. N. G. de Bruijn, P. Erdős, *On a combinatorial problem*, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 51, (1948) 1277–1279 = Indagationes Math. 10(1948), 421–423.
- Cun11. M. Cuntz, *Minimal fields of definition for simplicial arrangements in the real projective plane*, Innov. Incidence Geom. 12(2011), 49–60.
- EFU. S. Eterović, F. Figueroa, G. Urzúa *On the geography of line arrangements*, arXiv:1805.00990 [math.AG].
- Fult. W. Fulton, *Algebraic curves*, <http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf>.
- Gr05. B. Grünbaum, *A catalogue of simplicial arrangements in the real projective plane* Ars Math. Contemp. 2(2009), no. 1, 1–25.
- Hart. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM 52, 1977.
- Hirz83. F. Hirzebruch, *Arrangements of lines and algebraic surfaces*, Arithmetic and geometry, Vol. II, 113–140, Progr. Math., 36, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983.
- KNP15. G. Korchmáros, G. Nagy, N. Pace, *k-nets embedded in a projective plane over a field*, Combinatorica 35(2015), no.1, 63–74.
- P87. U. Persson, *An introduction to the geography of surfaces of general type*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., 46(1987), 195–218.
- UAG. M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/Miles.Reid/MA4A5/UAG.pdf>.
- Shaf. I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry I*, Springer, 1988.
- So84. A. J. Sommese, *On the density of ratios of Chern numbers of algebraic surfaces*, Math. Ann. 268(1984), 207–221.
- Tr16. P. Tretkoff, *Complex Ball Quotients and Line Arrangements in the Projective Plane*, Mathematical Notes 51, Princeton University Press, 2016.
- U10. G. Urzúa, *On line arrangements with applications to 3-nets*, Adv. Geom. 10(2010), no.2, 287–310.