

# Seminario: **Superficies K3 y sus análogos en dimensión superior**

Yulieth Prieto-Montañez

18/03 - 29/04

## **Abstract**

El objetivo de este seminario es presentar las herramientas fundamentales para formular preguntas relacionadas con el estudio de propiedades geométricas específicas de las superficies K3 (e.g., como automorfismos, fibraciones elípticas, estructuras de Shioda-Inose). Asimismo, se propone explorar el análogo de estas herramientas en el contexto de variedades de dimensión superior, conocidas como variedades irreducibles holomorfas simplécticas (IHS) o variedades Hyperkähler.

## **Programa**

### **1 18/03: Definiciones, ejemplos, problemas**

Se presentarán las definiciones básicas y los ejemplos más destacados, introduciendo además las propiedades de interés de las superficies K3.

- [Kon20, Capítulo IV], [Huy16, Capítulos 1 & 2], [Deb22, §2,2.3]

Adicionalmente, se estudiará un ejemplo de variedad IHS en dimensión 4, correspondiente al esquema de Hilbert de 2-puntos en una superficie K3.

- [BeaDon85].

### **2 25/03: Teorema de Torelli para superficies K3**

Teorema de Torelli para superficies K3 y su demostración. Mapa de períodos. Moduli de superficies K3 polarizadas (caso de las superficies de Kummer).

- [Kon20, Capítulo VI & VII].

Formulación del Teorema de Torelli para variedades IHS.

- [Deb22, §3.8]

### 3 01/04: Grupos de Automorfismos y Cocientes

Tipos de automorfismos (simpléticos y no-simpléticos). Propiedades generales de estos automorfismos. Cocientes de superficies K3 mediante automorfismos de orden finito.

- [Huy16, Capítulo XV].

Aplicaciones del Teorema de Torelli.

- [Kon20, Capítulo VIII].

\*\*Comentarios sobre el grupo de automorfismos para el esquema de Hilbert de puntos en superficies K3.

### 4 08/04: La forma bilinear de $H^2(X, \mathbf{Z})$ y el retículo de Nerón-Severi

Definición básica de retículos. El grupo discriminante. La forma bilinear asociada en cohomología de una superficie K3 y el K3 retículo abstracto. El problema de Existencia, unicidad e inmersión de retículos.

- [Kon20, Capítulo I], [Huy16, Capítulo XI].

La forma de Beauville-Bogomolov para variedades IHS.

### 5 15/04: Fibraciones elípticas en superficies K3

Invariantes de las fibraciones elípticas en superficies K3. Aplicaciones del Teorema de Torelli para el moduli de superficies K3 que admiten fibraciones elípticas. Criterios basados en retículos para la existencia de fibraciones elípticas. La fórmula de Shioda.

- [Kon20, Capítulo III §3.3 ], [Huy16, Capítulo XI] cf. [Mir89].

### 6 29/04: Cómo pasar a dimensión alta

¿Qué se conoce actualmente? ¿Cuáles son las principales obstrucciones? Fibraciones Lagrangianas en variedades IHS. Problemas para adultos mayores.

## References

- [Kon20] S. Kondō, *K3 surfaces*, translated from the Japanese original by the author, EMS Tracts in Mathematics, 32, EMS Publ. House, Berlin, [2020] ©2020; MR4321993

- [Huy16] D. Huybrechts, *Lectures on K3 surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 158, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016; MR3586372
- [Mir89] R. Miranda, *The basic theory of elliptic surfaces*, Dottorato di Ricerca in Matematica, ETS, Pisa, 1989; MR1078016
- [BeaDon85] A. Beauville and R. Y. Donagi, La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), no. 14, 703–706; MR0818549
- [Deb22] O. Debarre, Hyper-Kähler manifolds, *Milan J. Math.* **90** (2022), no. 2, 305–387; MR4516494