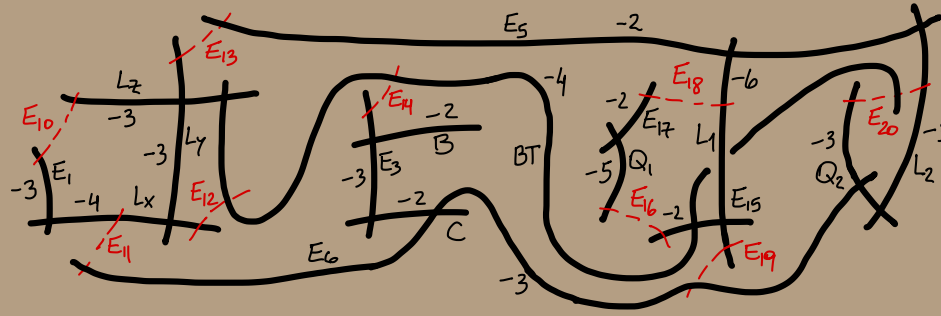




Giancarlo Urzúa
UC Chile
12 Agosto 2025
Coloquio PUCP

+

<< Classification of QAD Horikawa surfaces >> M. Conedo, U. 2025

<< Classification of Horikawa surfaces with T-singularities >>

V. Mouré, J. Negrete, U. 2024 (+ parte II 2025-26)

<< Tropical methods for stable octic surfaces >> 2024

S. Evans, A. Simonetti, U.

<< Exotic surfaces >> J. Reyes, U. 2022

<< Savage surfaces >> S. Truncoso, U. 2019

<< Chern slopes of simply connected complex surfaces of general type are dense in $[2, 3]$ >> X. Roulleau, U. 2014

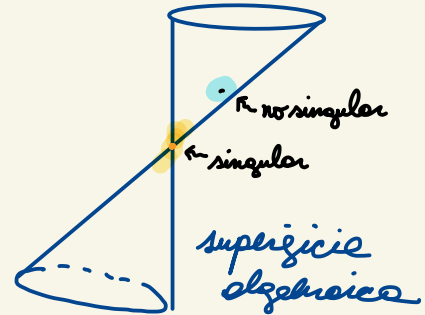
-

<< Wahl singularities on degenerations of del Pezzo surfaces >>
U., JP. Zúñiga. 2025

<< The birational geometry of Markov numbers >> U. JP. Zúñiga. 2023

Variiedad algebraica y divisor canónico

- Una **variiedad algebraica compleja** es el conjunto solución en $\mathbb{C}^N$ o $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ de un sistema de polinomios.
(afín) (projective)
- Le queremos **irreducible**. En un punto genérico veremos localmente un objeto analítico de $\mathbb{C}^n$ para un n fijo, la **dimensión** de la variedad.
- La variedad es **no singular** si es localmente como $\mathbb{C}^n$ para todo punto.
- Una variedad en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ es **compacta**.



- $\{y = x + 1\} \subset \mathbb{C}^2$; $\{y = x + z\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

$$\mathbb{C} \stackrel{12}{\simeq} \text{---} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \stackrel{12}{\simeq} \text{---}$$

- $\mathbb{C}/\langle 1, \zeta \rangle \simeq \text{---} \simeq \{x^3 + y^3 + z^3 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$
curva "elíptica"

- $\{w^3 = x^3 + y^3 + z^3\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$
"superficie cúbica"



- $\{wx^2 + wy^2 + wz^2 = 3xyz\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$
"otra superficie cúbica"



singular en $[0,0,0,1]$

Dada una variedad X , el divisor canónico K_X se puede pensar como:

- Considerar ω diferencial meromorfa en $\Lambda^n \Omega_X^1$.
- Ceros de ω = conjunto algebraico codim 1 de $X = \mathbb{Z}$
- polos de ω = otro conjunto algebraico codim 1 de $X = \mathbb{P}$

$$\Rightarrow K_X = \mathbb{Z} - \mathbb{P} \quad (\text{suma formal})$$

Si tenemos otra diferencial $\omega' \Rightarrow$ existe función meromorfa $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ tal que $\omega' = \text{div}(f) + \mathbb{Z} - \mathbb{P}$.

Idea: En X podremos intersectar (digamos X no singular) divisores (codim 1 subvariedades) con curvas $\Rightarrow K_X$ nos dará «intersecciones canónicas»



¿ Pero que pasa con $\text{div}(f) \cdot \text{Curve}$? Resp: es cero.

Ej: En $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ podemos calcular $K_X = -P - q$ para $p, q \in X$ cualesquiera. En X la única curva es X , con lo cual $K_X \cdot X = \text{grado}(K_X) = -2$.

Ej: Si $X = \text{Curva projectiva no singular}$, entonces $X = \text{superficie de Riemann compacta de género } g$.



Se tiene $\text{grado}(K_X) = 2g - 2$.

Ej: Una curva plana no singular de grado d en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es $X = \{ \underbrace{F_d(x, y, z)}_{\text{irreducible}} = 0 \} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \quad \therefore g(x) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

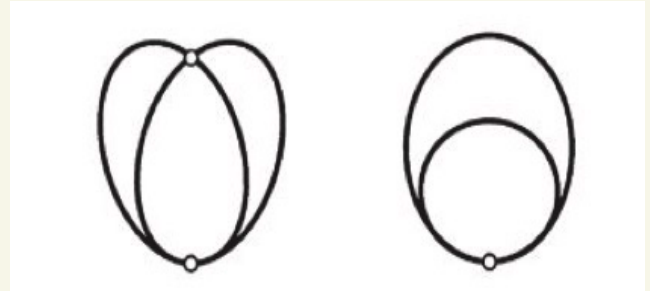
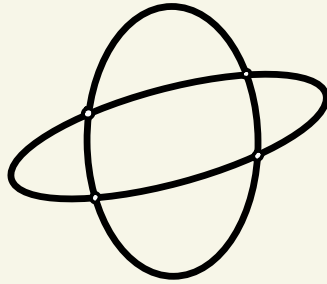
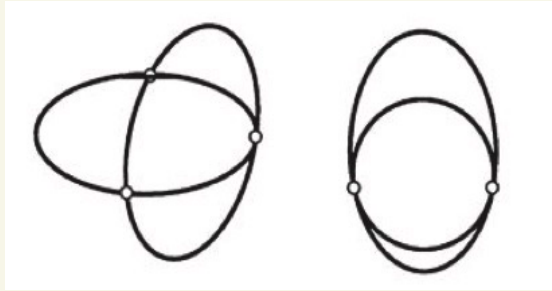
y $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ no todos cero

Ej: $\{x^d + y^d + z^d = 0\}$

Ej: $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es una superficie compleja no singular.
 Su teoría de intersección es el teorema de Bézout:



Teorema: Dados curvas Γ_d, Γ_e de grados d y e
 $\Rightarrow \Gamma_d \cdot \Gamma_e = de$.



$K_X = -\Gamma_3$ y así $K_X \cdot \Gamma_d = -3d < 0$, para
 toda curva Γ_d . También $K_X \cdot K_X = \Gamma_3 \cdot -\Gamma_3 = 9$.

Disponemos $X = \text{Variedad projectiva (normal)}$.

$$K_X > 0 : K_X \cdot \Gamma > 0 \quad \forall \text{ curve } \Gamma \subset X \text{ y } K_X^n > 0.$$

Canónico positivo

$$K_X \equiv 0 : K_X \cdot \Gamma = 0 \quad \forall \text{ curve } \Gamma \subset X.$$

Canónico cero

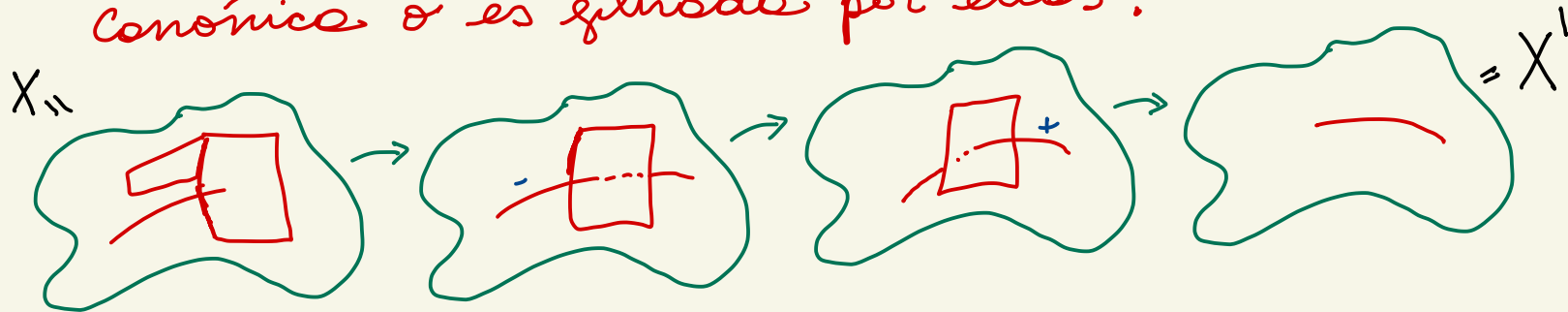
$$K_X < 0 : K_X \cdot \Gamma < 0 \quad \forall \text{ curve } \Gamma \subset X \text{ y } (-K_X)^n > 0.$$

Canónico negativo

Obs: Típicamente una X no cae en ninguna, pero tenemos los ingredientes de geometría birracional, o teoría de Mori o Minimal Model Program (MMP)...

Filosofía MMP:

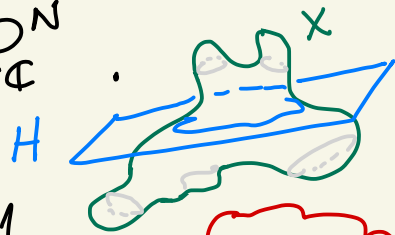
Dada una X , se hacen ginitos "cirugías" en X (flips o contracciones divisoriales) tal que el resultado ginel X' sea en alguna positividad canónica o es glnado por ellos.



$K < 0$	$K \equiv 0$	$K > 0$
Fano	Colebi-Yau	Tipo general

Variedades fundamentales

Ej: Hipersuperficies $X_d = \{F_d(x_0, x_1, \dots, x_N) = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$.
 no singulares



$$\therefore K_{X_d} = (d-1-N)H|_{X_d} \quad \text{y} \quad \dim X_d = N-1.$$

El signo de K_{X_d} depende del signo de $d-1-N$.

no hay
MMP!

Fano
si
 $d < N+1$

Ejemplo: $N=2$
 $\Rightarrow d=1 \text{ o } 2$

$$\text{y } X_d \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

Caldesi-Yau
si
 $d = N+1$

$N=2$
 $\Rightarrow d=3$

$$\text{y } X_d \simeq \text{toro}$$

tipo general
si
 $d > N+1$

$N=2$
 $\Rightarrow d \geq 4$

$$\text{y } X_d \simeq \text{curva de género } g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

En dimensión 1 no hay MMP y en efecto:

$$K < 0$$



$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

$$g = 0$$

$$K = 0$$



$$\text{torus} \cong \mathbb{C} / \langle 1, \tau \rangle$$

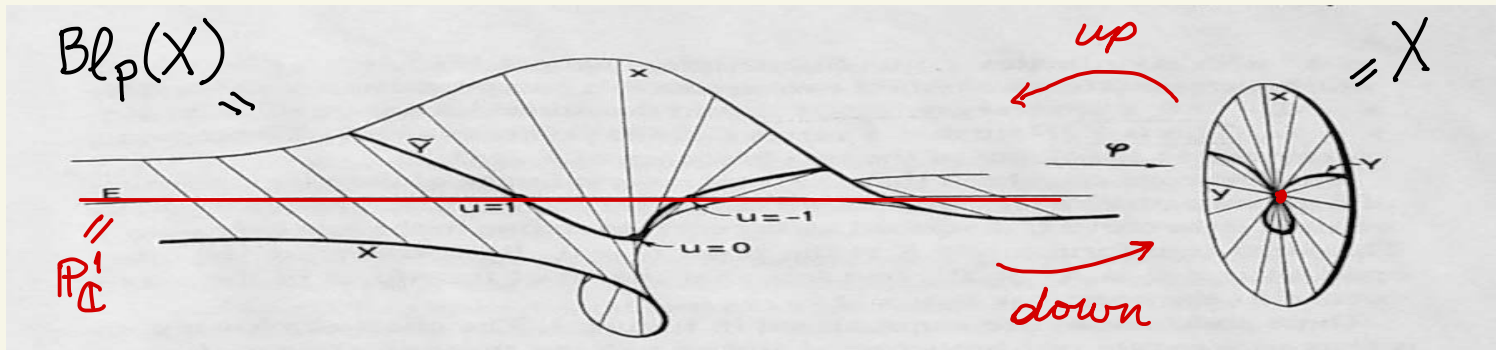
$$g = 1$$

$$K > 0$$



$$g \geq 2$$

- En dimensión 2 si hay MMP y esté dominado por la operación Blow-up:



- up es una construcción simple; down es un teorema.

reemplazar un punto
no singular por un
 $\Gamma = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ con $\Gamma^2 = -1$.



contraer una $\Gamma = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$
con $\Gamma^2 = -1$ a un
punto no singular.

Teorema: En dimensión 2, luego de controlar todos los posibles $\Gamma = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ con $\Gamma^2 = -1$, tenemos una superficie X con

- $K_X \cdot \Gamma \geq 0 \quad \forall \text{ curva } \Gamma \subset X$.
- X está fibrado por $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sobre una curva C .
- $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.



En dimensión 2, las variedades fundamentales son:



Superficies del Perazzo

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \text{Bl}_{\underbrace{p_1, \dots, p_s}_{\text{puntos generales}}}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2) \quad s \leq 8$$

$$K < 0$$

Superficies K3 y superficies abelianas $\mathbb{C}^2/\Lambda$
y ciertos cocientes finitos de ellos
(e.g. superficies de Enriques)



$$K = 0$$

Superficies de tipo general

$$K > 0$$

Solue superficies de tipo general sabemos poco...

Por ejemplo, miremos sus números de Chern:

$$C_1^2 = K_X \cdot K_X \quad C_2 = \chi_{\text{top}} = 2 - 2b_1 + b_2$$

entonces

$$C_1^2 + C_2 \equiv 0 \pmod{12} \quad \text{Fórmula de M. Noether 1870}$$

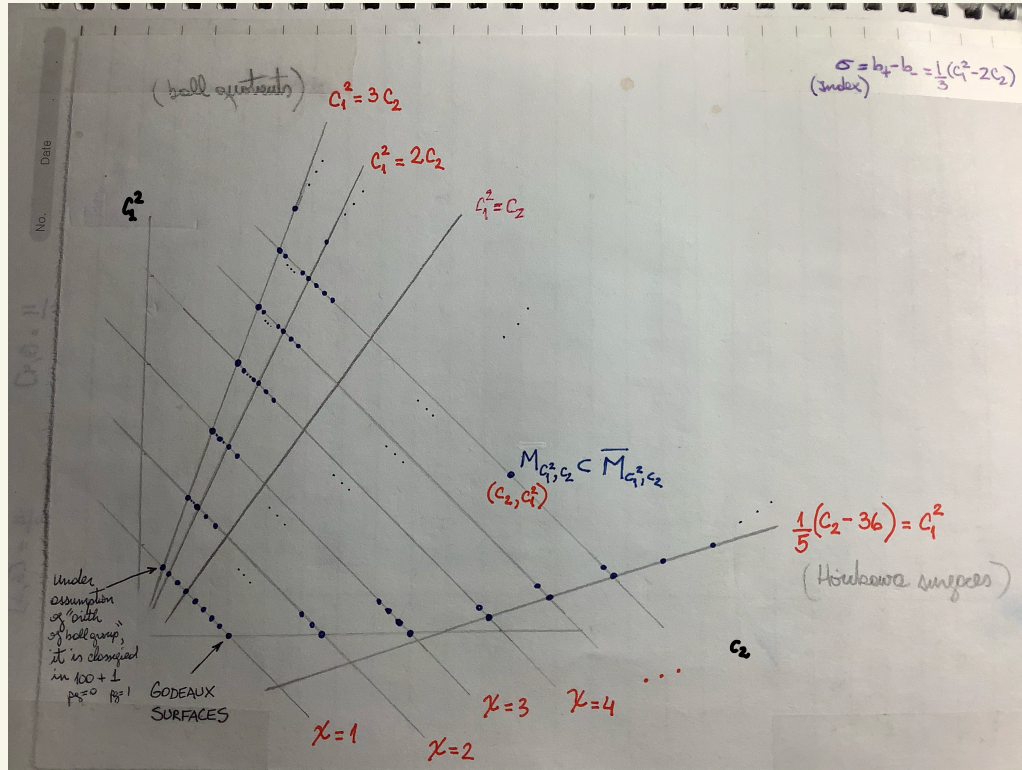
$$C_1^2 > 0, \quad C_2 > 0 \quad \text{Desigualdad de Castelnuovo 1905}$$

$$\underbrace{\frac{1}{5}(C_2 - 36) \leq C_1^2}_{1870 \text{ Desigualdad de Noether}} \leq \underbrace{3C_2}_{\text{Desigualdad de Bogomolov-Miyazaki-Yau 1977}}$$

= son las superficies
de Horikawa

= $\Leftrightarrow X$ es un cociente de
la bola de $\dim_{\mathbb{C}} = 2$

Geografía de superficies de tipo general



Dado $(a, b) \in \text{Zona OK}$, $\exists X$ con $c_1^2(X) = a$, $c_2(X) = b$?

¡Aun no rellenamos todos los puntos! (Comparar con curvas y g)

- Notar que $\frac{c_1^2}{c_2} \in [\frac{1}{5}, 3]$. Teorema: $\frac{c_1^2}{c_2}$ es denso en $[\frac{1}{5}, 3]$.
(fácil)
- Digamos que pensemos en $\frac{c_1^2}{c_2}$ y $\pi_1(X) =$ grupo fundamental de X

Teorema: $\pi_1 = 1 \Rightarrow \frac{c_1^2}{c_2}$ es denso en $[\frac{1}{5}, 3]$
(Perron 80s; Roulleau-U 2015)

Teorema: $\pi_1 =$ grupo de alguna variedad fija $\Rightarrow \frac{c_1^2}{c_2}$ es denso en $[1, 3]$.
(Troncoso-U 2019; "Savage surges")

e.g.
Cualquier grupo finito ...

- El cuento con pares (c_1^2, c_2) es mucho más complicado...

Considerar los invariantes más pequeños posibles
 $c_1^2 = 1$, $c_2 = 11$ y $\pi_1 = 1$.

Teorema [Borow 1984]: Existe $sp(1)$ 4 dimensional.

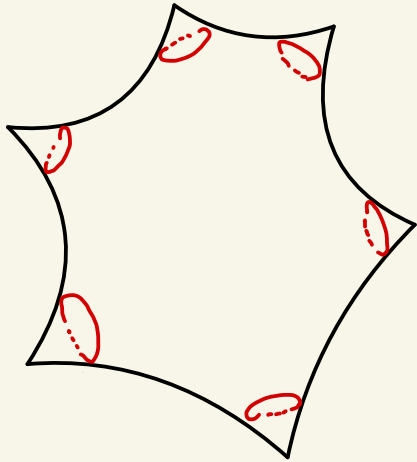
(Pero puede haber mucho más!)

(Son homeomorfos a $Bl_8(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$)

¿Qué sucede con $c_1^2 = 2, 3, \dots, 8$ $c_2 = 12 - c_1^2$ $\pi_1 = 1$?

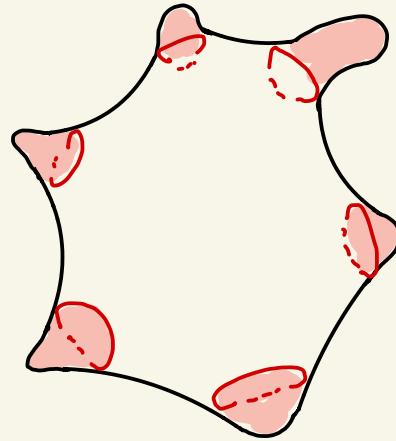
No que hasta el 2007 que los surcoreanos 
Yongnam Lee y Jongil Park demostraron ...
geometría algebraica geometría diferencial/simpléctica

Teorema [LP07]: Existen superficies simplemente conexas de tipo general con $C_1^2 = 2$ y $C_2 = 10$.

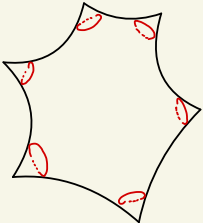
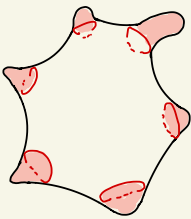


superficie racional
singular con $K > 0$

degeneración
leve
↔
suavización
apropiada



superficie de tipo
general con $C_1^2 = 2$, $C_2 = 10$

La  es una sombra de .

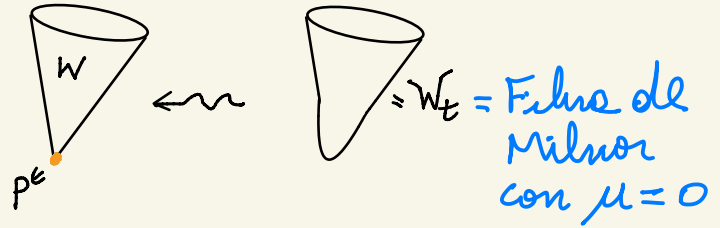
Construir la sombra demuestra existencia!

Preguntas:

- (1) Qué singularidades producen un daño leve?
- (2) Cómo construir sombras?
- (3) Qué se calcula para mostrar que es sombra de algo algebraico?

y como todo en matemáticas: (4) Dónde está la dificultad?

Las singularidades son las que poseen una suavización con número de Milnor $\mu=0$.



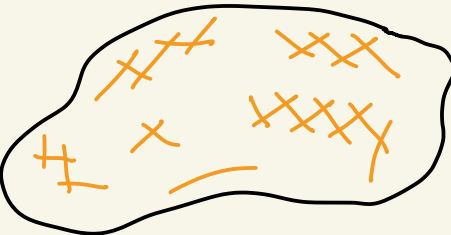
Los llamamos QHD.



originalmente estudiados por J. Wahl en los 80s.

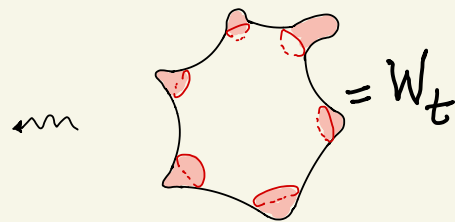
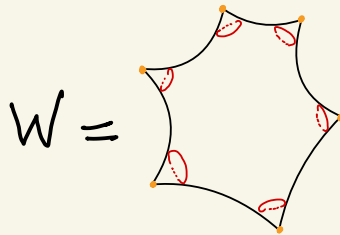
Relevantes en compactificación moduli (Kollár-Shepherd-Baron 1988), Rational blow-down de Fintushel-Stern-Park en los 90s, etc...

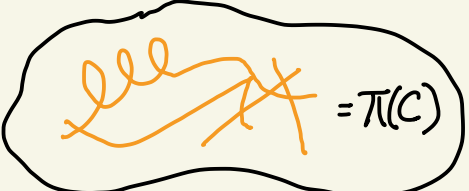
Singularidades cociente $\mu=0$ $\Rightarrow$ Singularidades de Wahl

 $= X \Rightarrow$ Cadenas **normales** de Wahl $= C$

π $\downarrow$ Composición de blow-downs (Castelnuovo)

ϕ $\searrow$ resolución minimal de singularidades



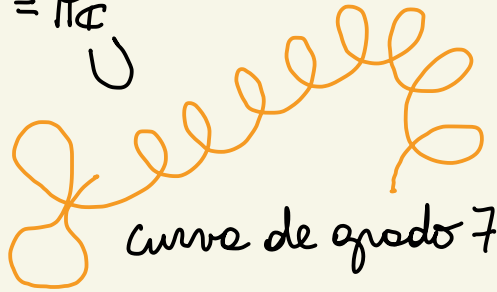
 $= \pi(C) = S$
 sin $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ con $\Gamma^2 = -1$

$\pi(C) =$ configuración de curvas racionales en S .

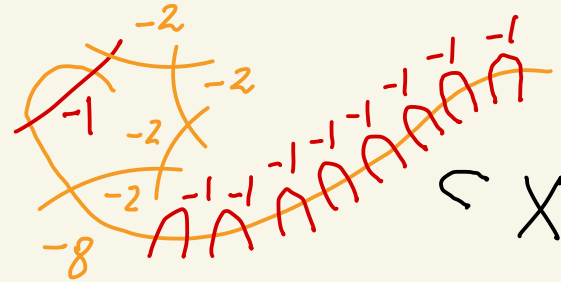
Dificultad: Encontrar $\pi(C) \subset S$ tal que $\underbrace{K_W}_{\text{razonable}} < 0$ o $\underbrace{K_W}_{\text{salvo}} \geq 0$.

(Existencia de W_t algebraico es cohomología / obstrucción...)

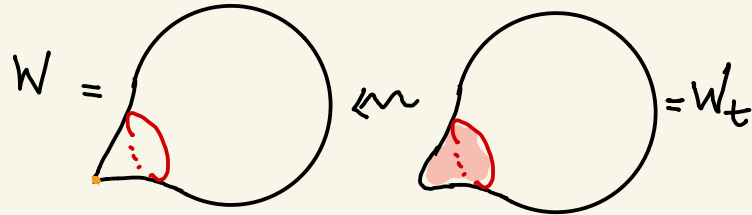
$$S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \cup$$



13 blow-ups
 $\swarrow$
 π



ϕ / Contracer la
configuración *neronje*



Demostroación de porqué
 W es sombra de tal W_t :

$$H^2(W, T_W) = 0$$

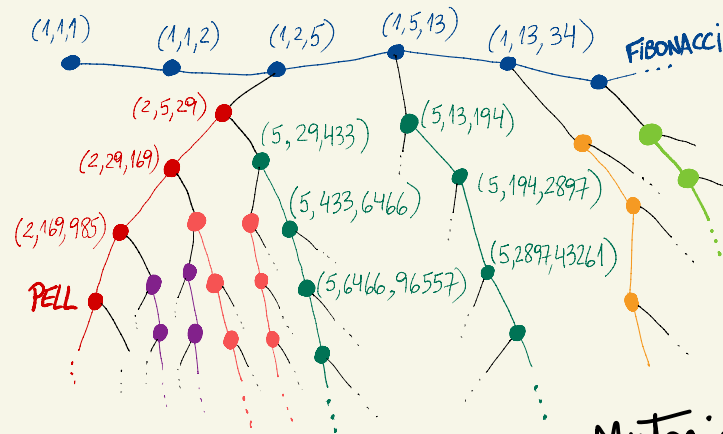
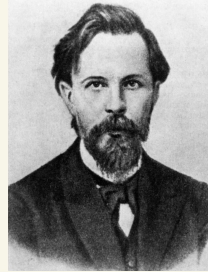
W superficie singular
sombra de W_t con $c_1^2 = 1, c_2 = 11, \pi_1 = 1$

Resultados $K < 0$ a través de sombras ...

Quiénes son los sombras de las superficies del Pezzo?

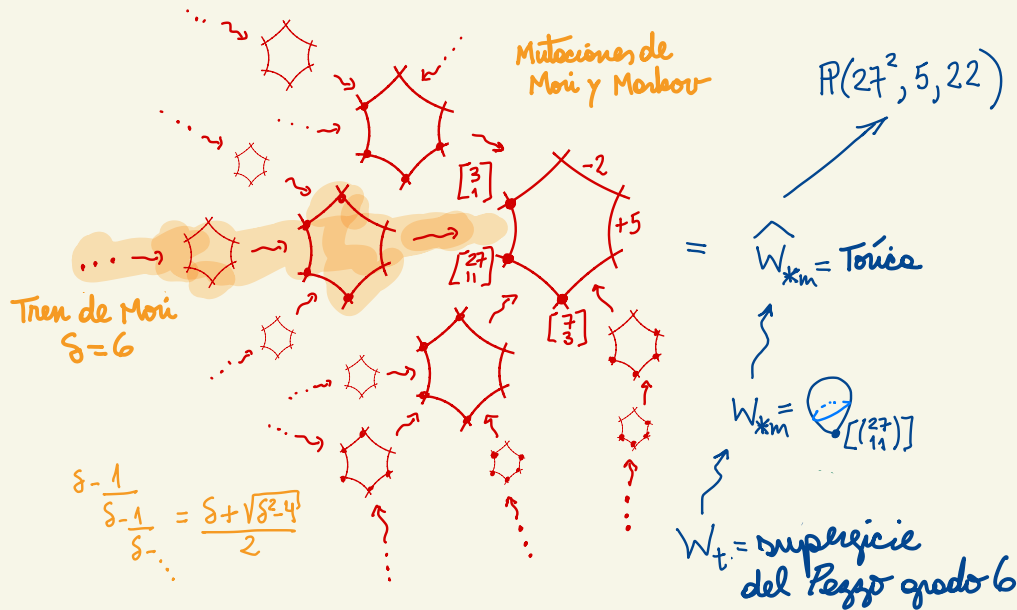
Teorema [Böcherer 86, Monetti 91, Hocking-Prokhorov 10]

Si $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \leadsto W$, entonces W proviene de $\mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$,
 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ (Ecuación de Markov).



Teorema [U-Zúñiga 23] Descripción total de la geometría birracional de un número de Markov y equivalencias a la conjetura de Markov (unicidad de Frobenius).

Teorema [U-Zúñiga 25] Clasificación de todos los someros de todos los superficies del Pezzo.



Consecuencia:

Para grados ≤ 4
 toda sing. de Wehl
 es posible, PERO
 grados ≥ 5 hay
 ∞ que no.

Resultados $K > 0$ a través de sombras ...

Aquí es muy complicado controlar configuraciones!

Termino la charla con dos casos con invariantes
<< pequeños >>.

(1) Sombras en la recta de Noether $c_1^2 = \frac{1}{5}(c_2 - 36)$ ↖ tipo I
(Superficies de Horikawa) y $c_1^2 = \frac{1}{5}(c_2 - 36) + 1$. ↖ tipo II

(2) Sombras cuando $c_1^2 + c_2 = 12$ y $\pi_1 = 1$.

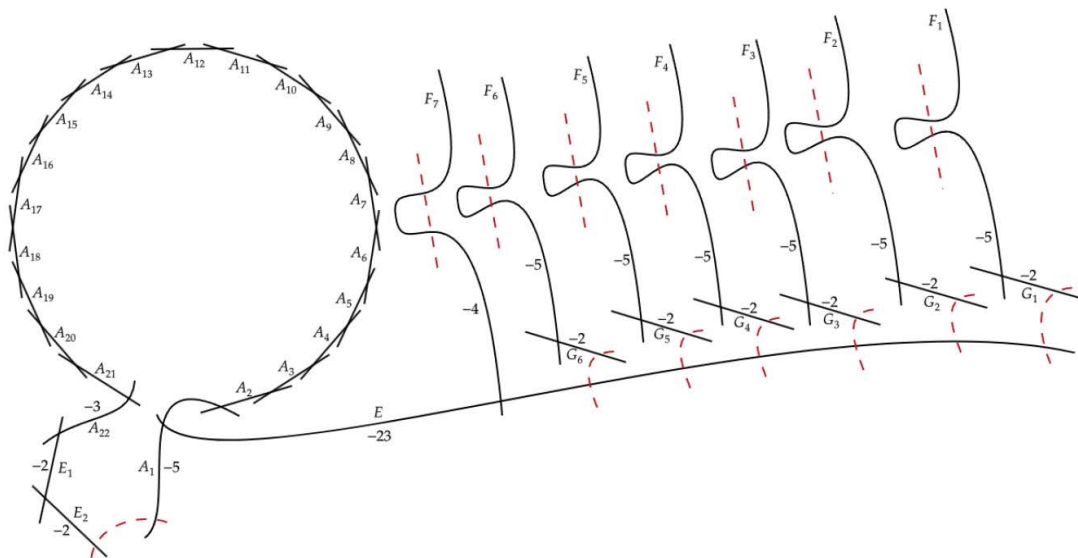
(aquí las superficies son homeomorfas a $Bl_{g-c_1^2}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$)
donde $1 \leq c_1^2 \leq 8$
 $\quad \quad \quad \parallel K^2$

Teorema [V. Monreal, J. Negrete, U 2024]:

Clasificación de toda posible solución de superficies de Hecke de **tipo I**. (En particular, el problema famoso del "tipo digeomorfismo" de Hecke no es posible resolverlo a través de soluciones.)

$$X =$$

Ejemplo
de
construcción
cuando
 $c_1^2 = 16$



También tenemos totalmente el caso **tipo II**, paper en progreso 2026(?) ...

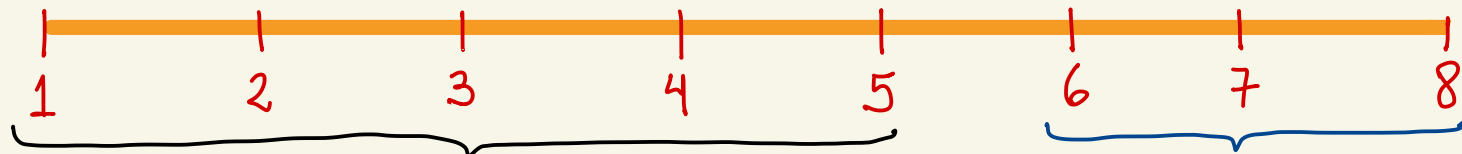
Con M. Conedo estamos clasificando **tipo I** con todas las singularidades QHD (i.e. $\mu=0$) ...

El resto de los $K>0$ con c_1^2 más grande está completamente abierto ...

Termino mirando el caso $c_1^2 + c_2 = 12$ y $\pi_1 = 1$.

Este es un trabajo en conjunto con J. Reyes y usamos búsquedas computacionales de conjugaciones de curvas.

$C_1^2 \in$



En términos de singularidades de Wahl

44 508 2104 1246 20

número de ejemplos
Constructibles con
1 singularidad
distinta y
suavizables
algebricamente.

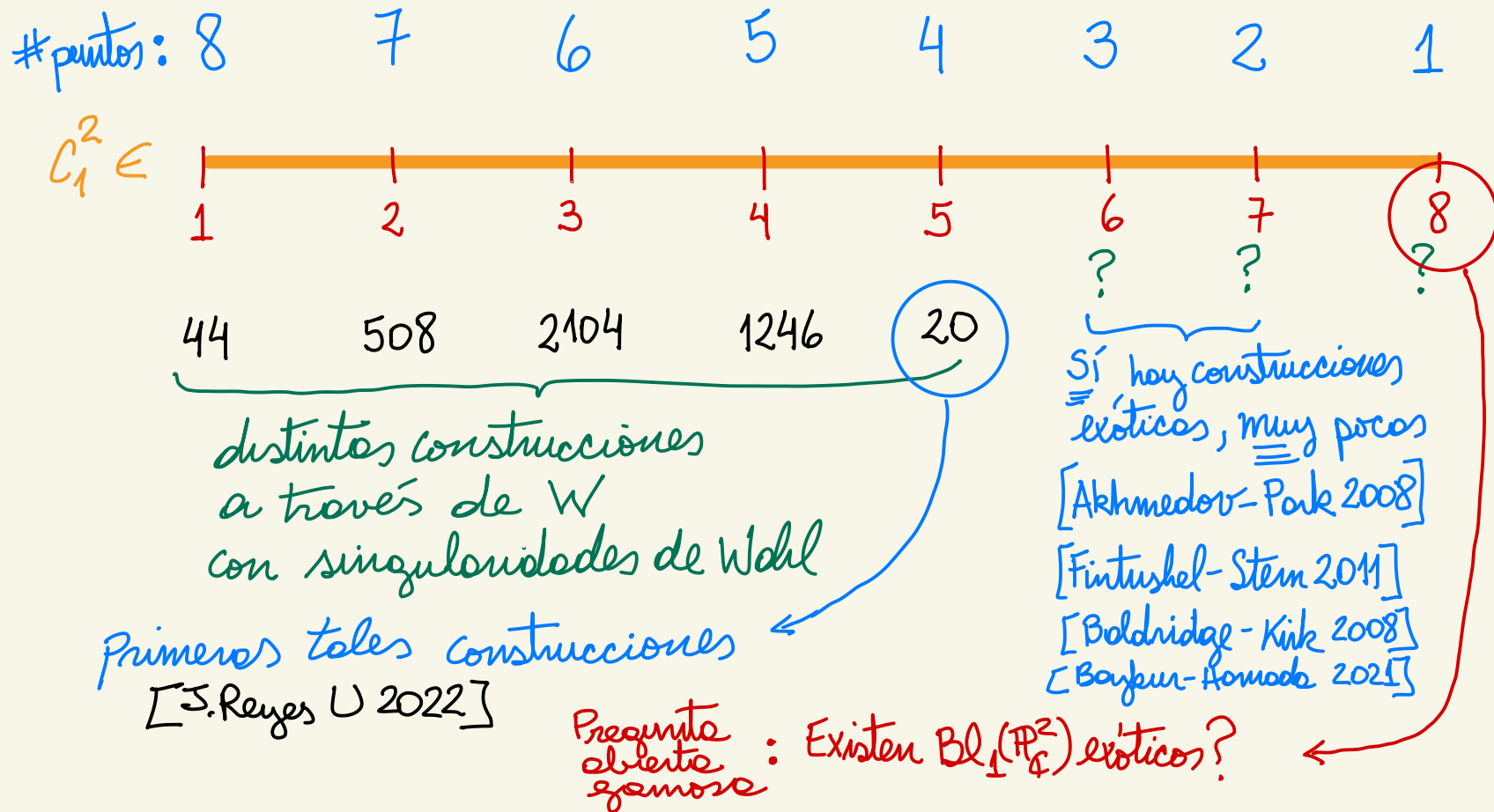
Abierto:

Tenemos suavización
a una superficie
algebraica?

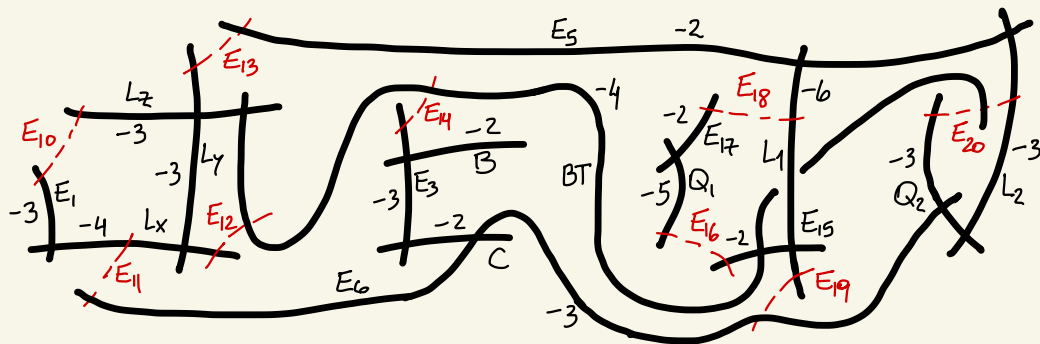
Abierto:

Existe alguna
superficie singular
 W con $K_W^2 = 6, 7, 8$?

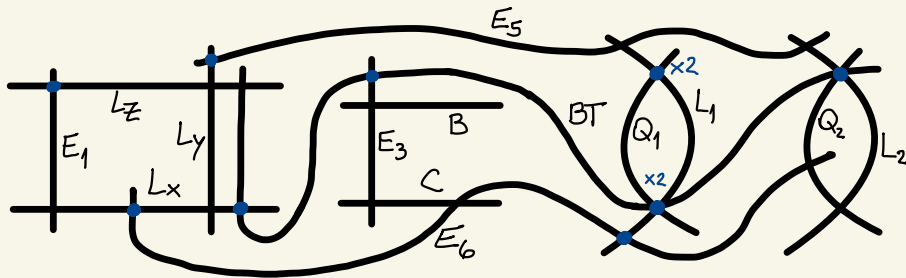
Existencia de tales $W \Rightarrow$ existencia de $Bl_{q-K_W^2}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ exóticos.



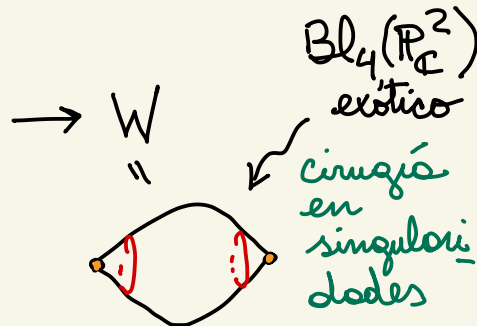
Un ejemplo de $\text{Bl}_4(\mathbb{P}_\mathbb{C}^2)$ exótico:



↓ 11 blow-ups



↓
 P_C'


$$\rightarrow \begin{matrix} P^2 \\ C \\ U \end{matrix}$$

Configuración
de 8 rectos
y 2 cónicos
muy especial.

$$\left. \begin{aligned} L_x, L_y, L_z \\ B = \{x+y+z=0\} \quad C = \{x-y+z=0\} \\ Q_1 = \{(x+z)^2 - y(x-z)=0\} \\ Q_2 = \{(x+z)^2 + y(x-z)=0\} \\ L_1 = \{x+y-z=0\} \\ L_2 = \{x-y-z=0\} \\ BT = \{x-iy+z=0\} \end{aligned} \right\}$$

FIN