Menores I: Intro a Amplitud Aritmética

(1)

1. Enteros algebraicos.

$\alpha \in \mathbb{C}$ : $\exists\, p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mónico, $p \not\equiv 0$, $p(\alpha) = 0$.

$\overline{\mathbb{Z}} = \{$enteros algebraicos$\}$ es un anillo $\supset \mathbb{Z}$.

Alturas $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}$, $\alpha \neq 0$, $F(x)$ = polinomio mínimo $\in \mathbb{Z}[x]$

$\therefore f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$, $\alpha_1 = \alpha$, $h(\alpha) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log^+|\alpha_i|$ $\quad \deg\alpha := \deg f(x)$

$$\log^+ t = \begin{cases} \log t, & t \geq 1 \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $\quad a_i \in \mathbb{Z}$ $\quad a_i$ = función simétrica de las raíces.

$\therefore$ Sabiendo grado y altura podemos estimar coeficientes.

Teorema (Northcott) $\forall A, B \in \mathbb{R}_{>0}$

$\{\alpha \in \overline{\mathbb{Z}},\ \deg\alpha \leq A,\ h(\alpha) \leq B\}$ es finito.

Dem/. Estimación de coeficientes ■

2. Motivación.

$F(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

H10 : Determinar algoritmo que decida existencia de raíces enteras.

Teorema (Matiyasevich) No existe tal algoritmo. [No hay tal teorema para $\mathbb{Q}$]

Teorema (Rumely ~ 80's) H10 admite un algoritmo sobre $\overline{\mathbb{Z}}$.

Teorema (Rumely) Supongamos que $\forall$ primo $p$ existe una $(a_1, \dots, a_n) \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,n}$ tal que $F(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \pmod p$

Entonces existe $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \overline{\mathbb{Z}}^n$ con $F(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$.

Sea $F$ absolutamente irreducible (ie $F$ irred. en $\overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$)

Ej/. $(2x-1)(3x-1) = 0$ no satisface el teorema

Problema: Cuando se cumple la hipótesis ¿cómo se construye la solución?

$n=2$

Teorema (Rumely, 90's) $\forall F \in \mathbb{Z}[x,y]$, abs. irred, $\exists\, C = C(F)$ $\boxed{\text{efectivamente}}$ ! calculable, tal que si $\forall p$, $F=0$ tiene solución en $\overline{\mathbb{Z}}_p^2$, entonces $\exists\, (\alpha,\beta) \in \overline{\mathbb{Z}}^2$ con $F(\alpha,\beta)=0$ y $\max\{h(\alpha), h(\beta)\} \leq C$.

obs: El teorema NO da una cota para $\deg \alpha$ o $\deg \beta$.

Teorema (Autissier 2000) $\exists$ una infinidad de soluciones en $\overline{\mathbb{Z}}^2$ y $\max\{h(\alpha), h(\beta)\} \leq C + \varepsilon$.

3. Lenguaje de esquemas.

$A$ anillo, $\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A, \text{ ideal primo}\}$ ...

$F(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}[x,y]$, $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x,y]/(F(x,y)) \Rightarrow f^*: \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[x,y]/F\right) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$

Es una superficie aritmética.

$p$, $q$, $(0)$

→ Supongamos $\exists\, (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $F(u,v)=0$.

$ev_{(u,v)}: \mathbb{Z}[x,y] \longrightarrow \mathbb{Z}$, $G(x,y) \mapsto G(u,v)$

⇝ induce $\overline{ev}_{(u,v)}: A_F \to \mathbb{Z} \Rightarrow \overline{ev}^*_{(u,v)}: \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec} A_F$ es una sección, i.e., $f^* \circ \overline{ev}^*_{(u,v)} = id$.

$$\{\text{Soluciones en } \mathbb{Z}^2\} \longleftrightarrow \{\text{secciones } \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec} A_F\}$$

Comentario: $K$ = cuerpo de números (extensión finita de $\mathbb{Q}$)

$\mathcal{O}_K := \overline{\mathbb{Z}} \cap K$ anillo de enteros

Una solución de $F=0$ en $\overline{\mathbb{Z}}^2$ la interpretamos como $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K \to \operatorname{Spec} A_F$

Curva aritmética = $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ algún $K$.

4. Teoría intersección aritmética (Teoría de Arakelov)

Divisores : $\mathfrak{X}$ sup aritmética. Un divisor es una ~~cadena~~ combinación de subvar. de $\mathfrak{X}$ de codim 1. Hay dos tipos: Horizontales (se obtienen tomando la imagen de una sección) Verticales (componentes irreducibles de fibras finitas), y multisecciones.

$h \in$ Cuerpo de fracciones $(\mathbb{Z}[x,y]/F)$ , $\operatorname{div}(h)$ = divisor asociado.

$D_1, D_2$ div horizontales , $y \in D_1 \cap D_2$

$m_y(D_1 \cap D_2)$ = índice de intersección $= \log \# \underbrace{\mathcal{O}_{y,\mathfrak{X}} / (f_1, f_2)}_{\text{anillo finito}} \in \mathbb{R}$.

$$(D_1 \cdot D_2)_{fin} = \sum_{y \in D_1 \cap D_2} m_y(D_1 \cap D_2)$$

obs: $(\operatorname{div} h \cdot D_2)_{fin}$ no está obligado a anularse.

$$D_1 \cdot D_2 = (D_1 \cdot D_2)_{fin} + (D_1 \cdot D_2)_{\infty}$$

$\widehat{\operatorname{div}} h = (\operatorname{div} h, -\log|h|)$ y $\widehat{\operatorname{div}} h \cdot \hat{D} = 0 \quad \forall \hat{D}$.

Funciones de Green : $X = f^{-1}(0)$ = "soluciones complejas de $F=0$".

$P \in X$ , $g : X \setminus \{P\} \to \mathbb{R}$ se dice función de Green si :

i) es $\mathcal{C}^{\infty}$

ii) Si $\theta$ es un param. local centrado en $P$ ($\theta(P) = 0$)

$\Rightarrow g = -\log|\theta| + b$ , $b \in \mathcal{C}^{\infty}$.

Admisibilidad : $H^0(X, \Omega^1) = \{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ $g$ = género de $X$ → compacto

$(v_1, v_2) \mapsto \int_X v_1 \wedge \bar{v}_2$ , $\mu_{Ar} = \frac{1}{g} \sum_{i=1} \omega_i \wedge \bar{\omega}_i$ (1,1)-forma

$\mathcal{C}^{\infty}$ y positiva. Se dice Admisible si $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} g \, dz \wedge d\bar{z} + \delta_P = \mu_{Ar}$.

→ $\hat{D} = (D, g)$, $D$ = divisor horiz. en $\mathfrak{X}$ y $g$ = función Green admisible cr a $D(\mathbb{C})$.

Suponer $\int_X g \mu_{Ar} = 0$ , $\hat{D}_1 = (D_1, g_1)$ $\hat{D}_2 = (D_2, g_2)$ , $\hat{D}_1 \cdot \hat{D}_2 = (D_1 \cdot D_2)_{fin} + g_2(\underbrace{D_1(\mathbb{C})}_{\text{un punto}})$

es simétrico.