~~E. DREGÓN~~.

Fibrados metrizados complejos.

X = sup. Riemann compacta

$\mathcal{L}$ = haz invertible

Notación: $\{\mathcal{U}_i\}$ cubrimiento por abiertos tal que $\mathcal{L}|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} \mathcal{O}|_{\mathcal{U}_i}$

$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \mathcal{O}|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} \longrightarrow \mathcal{O}|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$, $\varphi_{ij}(1) = \varphi_{ij}$

$\mathcal{L}$ dado (U_i, φ_{ij}).

S: s es sección de $\mathcal{U} \subset \underline{X}$ es lo que es.

Def. – Una métrica en $\mathcal{L}$ es $\rho = (\rho_i)_i$ donde $\rho_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^+$ suave tal que (*) $\rho_i = |\varphi_{ij}|^2 \rho_j$ es $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ dado).

Notación: $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \rho)$ haz metrizado en $\underline{X}$.

Evaluar en secciones: si $s \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $p \in \mathcal{U}$, entonces $|s(p)|_\rho^2 := \dfrac{|s_i(p)|^2}{\rho_i(p)}$

para todo $p \in \mathcal{U}_i$ (solo depende de p y de s).

Ejemplo: $X = \mathbb{P}^1$ con coord $[z_0, z_1]$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$

$\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \{$ funciones racionales homog. de grado 1 en $\mathbb{C}[z_0, z_1]$ sin polos en $\mathcal{U}\}$

En $\mathbb{P}^1$ tengo $\mathcal{U}_i = \{[z_0, z_1] \,/\, z_i \neq 0\}$

1) $\rho_{FS} = \{\rho_0, \rho_1\}$ tq $\rho(z_0, z_1) = \left|\frac{z_0}{z_1}\right|^2 + \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2$ en $\mathcal{U}_j$

2) $\tilde{\rho} = \{\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1\}$ $\tilde{\rho}_i(z) = \max\left\{\left|\frac{z_0}{z_1}\right|^2, \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2\right\}$ en $\mathcal{U}$.

} válido en dim mayor

Operaciones:

1) Inversa: $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \rho)$ con dato $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_{ij}, \rho_i)\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}$ tiene datos $\{(\mathcal{U}_{ij}, \varphi_{ij}^{-1})\}$, $\hat{\mathcal{L}}^\vee = (\mathcal{L}^{-1}, \rho^{-1})$ con $\rho_i^{-1} = \dfrac{1}{\rho_i}$ es el haz metrizado dual.

2) Producto tensorial: $\underset{\mathcal{L}\,\rho}{\hat{\mathcal{L}}} \otimes \underset{\mathcal{M}\,\sigma}{\hat{\mathcal{M}}}$ tiene dato $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_{ij}\psi_{ij}, \rho_i \sigma_i)\}$

refinamiento

obs: $\hat{\mathcal{L}} \otimes \hat{\mathcal{L}}^\vee = \hat{\mathcal{O}} = (\mathcal{O}, 1)$

Pull-back: $X' \xrightarrow{f} X$ holomorfa $\Rightarrow$ existe $f^*\mathcal{L}(f^{-1}(\mathcal{U})) := \mathcal{L}(\mathcal{U}_i)$ y se extiende a un haz en X'.

Si $\mathcal{L}$ tiene datos $(\mathcal{U}_i, \varphi_{ij}) \Rightarrow f^*\mathcal{L}$ datos $(f^{-1}(\mathcal{U}_i), \varphi_{ij} \circ f)$.

Si ρ es métrica en $\mathcal{L} \Rightarrow f^*\rho = (\rho_i \circ f)$ en cada $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$.

En secciones: Si s sección de $f^*\mathcal{L}$, $Q \in X' \Rightarrow |s(Q)|_{f^*\rho} = |s(f(Q))|_\rho$

Para el producto. s, t secciones en $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ resp $\Rightarrow |(s\otimes t)(P)|_{\rho\otimes\gamma} = |s(P)|_\rho \cdot |t(P)|_\gamma$.

Forma de Chern de una métrica: $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \rho)$

$c_1(\rho) := dd^c \log \rho_i$, en $\mathcal{U}_i$.

Esto es la forma de Chern asociada a ρ.

obs/. $\rho_i = |\varphi_{ij}|^2 \rho_j \Rightarrow dd^c \log \rho_i = \underbrace{dd^c \log |\varphi_{ij}|^2}_{\substack{0 \\ \text{por armónica}}} + dd^c \log \rho_j$.

$c_1(\rho)$ bien definida.

Si s es sección racional en $\mathcal{L}$ (a lo más polos). Como $|s|^2_\rho = |s_i|^2/\rho_i$

$\Rightarrow c_1(\rho) = -dd^c \log |s|^2_\rho$ en $\overline{X} \setminus \mathrm{Supp}(S)$

Si $\rho, \tilde{\rho}$ son dos métricas en $\mathcal{L}$. En los abiertos: $\tilde{\rho}_i/\rho_i = \tilde{\rho}_j/\rho_j$ así que globalmente $\rho/\tilde{\rho}$ definido y C^∞ en X.

$\Rightarrow c_1(\rho) - c_1(\tilde{\rho}) = dd^c \alpha \quad \forall \alpha \in C^\infty(X)$.

$$\boxed{\rho = \lambda\tilde{\rho} \iff c_1(\rho) = c_1(\tilde{\rho}) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}^+}$$

ρ es métrica positiva si $c_1(\rho)$ es $(1,1)$-forma positiva.

1) Si $\mathcal{L}$ es haz invertible $\Rightarrow$ admite métrica

2) Si $\mathcal{L}$ amplio $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ admite métrica positiva.

3) (Kodaira) Si $\mathcal{L}$ admite métrica positiva $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ amplio.

4) $f: X' \longrightarrow X$ holom. y $\hat{\mathcal{L}}$ con métrica positiva en X $\Rightarrow f^*\hat{\mathcal{L}}$ es nonegativa
Si f embedding $\Rightarrow f^*\hat{\mathcal{L}}$ positiva.

Relación entre métricas y funciones de Green.

Sea $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \rho)$, s sección racional. Luego existe g función de Green asociada a s y $\lambda c_1(\rho)$, para $\lambda = \frac{1}{\deg(\mathcal{L})}$

Prop.- $\int_X c_1(\rho) = \deg(\mathcal{L})$ grado de cualquier sección.

(1) $g = -\log|s|_\rho^2 + \text{algo } C^\infty$ fuera de supp de s.
(2) $dd^c g = \deg\mathcal{L} \cdot \frac{c_1(\rho)}{\deg\mathcal{L}} = c_1(\rho)$

$\Rightarrow$ algo $=$ Constante $\Rightarrow g = -\log|s|^2_{e^\lambda\rho}$

Luego, $g = -\log|s|^2_{\lambda\rho}$ es función de Green asociada a s y $\frac{c_1(\rho)}{\deg\mathcal{L}}$.

Prop: Si φ (1,1)-forma tal que $\int_X \varphi = \deg\mathcal{L} \Rightarrow \varphi = c_1(\rho)$ para alguna métrica ρ.

Existencia de métrica $\Leftrightarrow$ Existencia función de Green.

Pf.- Sea g asociado a s sección racional y $\varphi/\deg\mathcal{L} \Rightarrow (1)$, $g = -\log|s_i|^2 + \underset{C^\infty}{\alpha_i}$
definimos $\rho_i = \exp(\alpha_i)$. Esto cumple la condición de compatibilidad
$\Rightarrow \rho = (\rho_i)$ Pero $(2) \Rightarrow dd^c g = -dd^c\log|s|^2_\rho = c_1(\rho) = \varphi$.
$\varphi_1 = c_1(\rho)$ ∎