Modelo mínimo regular y semiestabilidad
(N. García)

§ Regularidad

Def: Un esquema X es regular si sus anillos locales son regulares. Es regular en un punto cerrado P si $\mathcal{O}_{X,P}$ es anillo regular.
Un esquema X es normal si sus anillos locales son dominios enteros e integralmente cerrados.

Tenemos $\boxed{\text{REGULAR} \Rightarrow \text{NORMAL}}$

Podemos verificar regularidad a veces.
Teorema del Jacobiano: Sea k cuerpo, $X = V(I)$ subvariedad cerrada de $\mathbb{A}^n_k$, sean $F_1, \dots, F_R$ sistema de generadores de I, y sea $P \in X(k)$. Tenemos que X es regular en P si y solo si $Rk(J_P) = n - \dim \mathcal{O}_{X,P}$, donde J_P es la matriz Jacobiana en P.
(algo similar para subvariedades en $\mathbb{P}^n_k$)

§ Modelos de curvas.

Def: Sea S un esquema de Dedekind de dimensión 1, sea K su cuerpo de funciones. Sea C curva normal, conexa, proyectiva sobre K. Un modelo de C sobre S es una superficie fibrada normal $\mathcal{C} \to S$, con un isomorfismo $\mathcal{C}_\eta \simeq C$.
Será modelo regular si $\mathcal{C}$ es regular (similar para mínimo regular, regular con normal crossings, etc)

Def: Un morfismo $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre dos modelos de una curva C sobre S es un morfismo de S-esquemas compatible con los $\mathcal{C}_\eta \simeq C$, $\mathcal{C}'_\eta \simeq C$.

Ej) $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es modelo $^{(\text{AFÍN})}$ de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ sobre $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.
Id. primos de $\mathbb{Z}[x]$ son:
(i) (0)
(ii) (f), con f número primo, o polinomio irred. sobre $\mathbb{Q}$, cuyos coef. tienen gcd 1.
(iii) (f, p), con p primo, f polinomio mónico entero irreducible mod p.

Dibujo en: D. Mumford - The red book of varieties and schemes. P. 75.

Es el ejemplo típico de una superficie aritmética: Esquema $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ regular, plano, proyectivo.

Ej) $C = \operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{Q}[X,Y]}{(XY-P)}$. Por criterio del Jacobiano, C es regular. Consideramos
$$\mathcal{C} = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{Z}[X,Y]}{(XY-P)} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$
modelo $^{(\text{AFÍN})}$ de C sobre $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Es regular, pues su fibra genérica lo es.
La fibra sobre el primo p es
$$\mathcal{C} \otimes \mathbb{F}_p = \operatorname{Spec} \frac{\mathbb{F}_p[X,Y]}{(XY)}$$
que es singular.

Ej) Sea $q \geq 1$ número entero libre de cuadrados. Sea C la curva proyectiva definida sobre $\mathbb{Q}$ por $x^q + y^q + z^q = 0$.
El criterio del Jacobiano muestra que C es regular sobre $\mathbb{Q}$.
El subesquema cerrado $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ definido por la misma ecuación es un modelo de $\mathcal{C}$.
Veamos la fibra de $\mathcal{C}$ sobre un primo p.
$$\mathcal{C}_p = \operatorname{Proj} \frac{\mathbb{F}_p[X,Y,Z]}{(X^p + Y^p + Z^p)}$$

Si $(p,q) = 1$, entonces $\mathcal{C}_p$ es regular.
Si p divide q: $\mathcal{C}_p = \operatorname{Proj} \dfrac{\mathbb{F}_p[X,Y,Z]}{(X^{q/p} + Y^{q/p} + Z^{q/p})^p}$ $\quad (\frac{q}{p}, p) = 1$

aquí $\mathcal{C}_p$ es irreducible y $(\mathcal{C}_p)_{red}$ es $V_+(X^{q/p} + Y^{q/p} + Z^{q/p})$ sobre $\mathbb{F}_p$. Se puede probar que $\mathcal{C}$ es normal (así que $\mathcal{C}$ es mod. de C).

Ej) Sea C curva normal proyectiva sobre K, definida por $F_1, \dots, F_m \in K[T_0, \dots, T_n]$. Sea $S = \operatorname{Spec} A$ (con $K = \operatorname{Quot}(A)$). Multiplicando por elementos de $A \setminus \{0\}$ obtenemos polinomios $F_1, \dots, F_m$ con coeficientes en A.

Si la superficie $\mathcal{C} = \mathrm{Proj}\, \dfrac{A[T_0, \dots, T_n]}{(F_1, \dots, F_m)}$ es normal, entonces automáticamente es un modelo de C, pues $\mathcal{C}_\eta \cong C$. Este es un modelo normal de C.

§ Modelo minimal regular de una curva.

Prop: Suponemos que S es afín. Sea C curva proyectiva suave de género g sobre $K(S)$. Entonces C admite un modelo minimal regular $\mathcal{C}$ sobre S. Si $g \geq 1$ entonces este es único.

Cómo encontrarlo: Dado un modelo $\mathcal{C}$ de una curva C sobre S (con hip. del teorema), se obtiene un modelo regular de $\mathcal{C}$ de la siguiente manera:

* Normalizar $\mathcal{C}$
* Hacer blow-up en puntos singulares
* Normalizar

etc

Este proceso termina en una cantidad finita de pasos (Lipman 1978).

La única diferencia entre los modelos regulares de $C^{(g \geq 1)}$ es la cantidad de "(-1)-líneas" (de cierto tipo). Se obtiene el (único) modelo minimal regular $\mathcal{C}_{min}$ de $\mathcal{C}$ contrayendo estas curvas:

Criterio de Castelnuovo: Sea $X \to S$ superficie fibrada regular. Sea $E \subset X_s$ divisor primo vertical. Sea $k' = H^0(E, \mathcal{O}_E)$. Entonces E es divisor excepcional si y solo si $E \cong \mathbb{P}^1_{k'}$ y $E^2 = -[k' : k(s)]$.

§ Semiestabilidad

Def: Una curva C sobre un cuerpo k es semiestable si $C_{\bar{k}}$ es reducida y sus singularidades son puntos dobles ordinarios. C es estable si además:

* C conexa y proy. de género arit. $p_a \geq 2$.
* si Γ es comp. irred. de C isomorfa a $\mathbb{P}^1$, entonces intersecta los otros componentes en al menos 3 puntos.

Def: $f: X \to S$ con S esquema. Decimos que X es una curva semiestable sobre S si f es de tipo finito, plana y cada fibra X_s es semiestable sobre $k(s)$.

Def: Un modelo $\mathcal{C} \to S$ de C es un modelo (semi)estable si $\mathcal{C} \to S$ es curva (semi)estable.

Teorema de la semiestabilidad (Deligne-Mumford) Sea S esquema de Dedekind de dimensión 1, sea C curva suave, proyectiva, geométricamente conexa de género ≥ 2 sobre $k(S)$. Entonces existe un esquema de Dedekind S' plano y finito sobre S y tal que $C_{k(S')}$ tiene un único modelo estable sobre S'. Además podemos asumir $k(S')$ separable sobre $k(S)$.

(se puede reempl. estable por semiestable regular).