19/Junio/18

R. Menares

1

- $K|_{\mathbb{Q}}$ extensión finita. $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $f(x,y) \in \mathcal{O}_K[x,y]$.
  $\mathcal{X} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K[x,y]/(f))$

$$\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \{ \operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \mathcal{X} \} \Leftrightarrow \{ \mathcal{O}_K[x,y]/(f) \to \mathbb{C} \} \ni \alpha$$

donde α está determinado por $\alpha|_{\mathcal{O}_K} : \mathcal{O}_K \to \mathbb{C}$, $\alpha(x)$, $\alpha(y)$
y así tenemos $\tilde{\alpha} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$.

$$\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \underbrace{\{ \alpha : \tilde{\alpha} = \sigma \}}_{X_\sigma}$$

- Ejl- p = primo, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $f(x,y) = xy - p$, $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[x,y]/(xy-p)$.
  $\sigma_2(\sqrt{p}) = -\sqrt{p}$, $\sigma_1 = 1\!\!1$ $\mathcal{X}(\mathbb{C}) = X_1 \sqcup X_2$
  $X_1 \leftrightarrow \{ \alpha : \mathcal{O}_K[x,y]/_{xy-p} \to \mathbb{C},\ \alpha|_{\mathcal{O}_K} = 1\!\!1 \} \leftrightarrow \{ (a,b) \in \mathbb{C}^2 : ab = p \}$
  $X_2 \leftrightarrow \{ \alpha : \ /,\ \alpha|_{\mathcal{O}_K} = \sigma_2 \} \leftrightarrow \{ (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ a \cdot b = p \}$

$$I = (x^2 - p, y^2 - p) \subseteq A = \mathbb{Z}[x,y]/(xy-p)$$
$$D(\mathbb{C}) = (\sqrt{p}, \sqrt{p}) + (-\sqrt{p}, -\sqrt{p}), \quad D \subseteq \mathcal{Y}.$$

- $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, regular, semiestable, proyectivo. $X_K := \mathcal{X} \otimes K$ suponemos geométricamente irreducible.
  Un fibrado metrizado $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ con $\mathcal{L}$ = fibrado invertible en $\mathcal{X}$
  y $h = (h_\sigma)_{\sigma : K \to \mathbb{C}}$ Donde h_σ es métrica en $\mathcal{L}_\sigma$.
  Aquí $\mathcal{L}(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathcal{L}_\sigma$, $\mathcal{L}_\sigma$ es un fibrado holomorfo sobre X_σ

$\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} X_\sigma$. $s \in \mathcal{L}_\sigma$, $g_s = -\log h_\sigma(s)^2$ es una función de Green para div s c/r a $c_1(\mathcal{L}_\sigma)/\deg \mathcal{L}_\sigma$. $|s|_\sigma := h_\sigma(s)$.

Fijamos una forma volumen μ_σ sobre cada X_σ con $\int_{X_\sigma}\mu_\sigma = 1$

$\mu = (\mu_\sigma)_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}}$

Def.- $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X},\mu)$ es el conjunto de clases de isometrías de fibrados metrizados $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ con métricas tal que $c_1(\mathcal{L}_\sigma) = \deg \mathcal{L}_\sigma \cdot \mu_\sigma$

Asumimos que las funciones de Green cumplen $\int_{X_\sigma} g_\sigma \mu_\sigma = 0$

Es un grupo bajo $\otimes$: neutro $(\mathcal{O}_\mathcal{X}, |\cdot|_\sigma) \to$ métrica trivial

Forma de intersección : $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{M}})$ fibrados metrizados :

Supongamos que hay secciones no nulas $\ell \in \mathcal{L}$, $m \in \mathcal{M}$ tales que $\mathrm{div}(\ell)$ y $\mathrm{div}(m)$ no tienen componentes en común.

$\Leftrightarrow$ $|\mathrm{div}(m)(\mathbb{C})| \cap |\mathrm{div}(\ell)(\mathbb{C})| = \emptyset$.

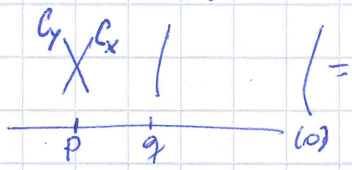
Sea x_0 un punto cerrado de $\mathcal{X}$ (sobre un cuerpo finito).

El índice de intersección en x_0:

$$\log \#\left(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x_0}/(\ell,m)_{x_0}\right)$$

$$(\ell,m)_{fin} := \sum_{x_0 \text{ cerrado}} \log \#\left(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x_0}/(\ell,m)_{x_0}\right)$$

Ej.- $\mathbb{Z}[x,y]/(xy-p) = A$



$= \mathcal{Y}$ $\quad x_0 = (p,x,y)$

$C_x = (p,x) \quad C_y = (p,y)$.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y},x_0} = A_{(p,x,y)} \quad \mathcal{L} = \mathcal{O}_\mathcal{Y}(C_x) \quad \mathcal{M} = \mathcal{O}_\mathcal{Y}(C_y)$

$\mathcal{O}_{\mathcal{Y},x_0}/(x,y) \simeq \mathbb{Z}[x,y]/(x,y,p) = \mathbb{F}_p \qquad (C_x \cdot C_y)_{x_0} = \log p$

$=$ mult geom. $\cdot \log$(cuerpo residual)

$\mathrm{div}\, \ell(\mathbb{C}) = \sum n_\alpha P_\alpha$, $P_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{C})$

$$(\ell \cdot m)_\infty := -\sum_\alpha n_\alpha \log |m(P_\alpha)|_{\hat{m}} = \sum_\alpha n_\alpha \cdot g_m(P_\alpha)$$

obs: 1) bien definido ya que no hay componente común.
2) simétrico (simetría función de Green normalizada).

Def: $\hat{\mathcal{L}} \cdot \hat{m} = (\ell \cdot m)_{fin} + (\ell \cdot m)_\infty$

Prop: Esto define una aplicación bilineal y simétrica
$\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}, \mu) \times \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Bien def: Suponer $\mathrm{div}(\ell)$ irred y horizontal.
K': el cuerpo de funciones de $\mathrm{div}\, \ell$, $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq K'$ extensión finita.
$\hat{m} = (\mathcal{O}_X, |\cdot|)$ veamos que
$\hat{\mathcal{L}} \cdot \hat{\mathcal{O}}_X = 0$. Sea f una sección de $\mathcal{O}_X$
$(\ell \cdot f)_\infty = -\sum_{\sigma : K' \hookrightarrow \mathbb{C}} \log |f(P)|_\sigma$
$\mathrm{div}\, \ell(\mathbb{C}) = \sum_{\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}} [\tau(P)]$.

$(\ell \cdot f)_{fin} = \sum_{\wp \subseteq \mathcal{O}_{K'}} v_\wp(f) \log N(\wp)$ ideal primo
$= -\log\left(\prod_{\wp \subseteq \mathcal{O}_K} |f|_\wp\right)$

Por la fórmula del producto, la suma a cero.

- Divisores compactificados. $\hat{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}, g_{\mathcal{D}})$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$ es un divisor y $g_{\mathcal{D}}$ es una función de Green para $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ con respecto a μ.
Divisor principal: f función racional $\widehat{\mathrm{div}}\, f = (\mathrm{div}\, f, -\log |f|^2)$ módulo complejo.
$\big[\, dd^c g_{\mathcal{D}} = \deg(\mathcal{D}(\mathbb{C}))\, \mu$ fuera de $|\mathcal{D}(\mathbb{C})|\, \big]$.
se cumple ✓
$\widehat{\mathrm{Cl}}(\mathcal{X}, \mu) := \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{X}, \mu) / \text{principal} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}, \mu)$

$-\log |s|_{\hat{\mathcal{L}}} = g_s$

$(\mathcal{D}, g_{\mathcal{D}}) \mapsto (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{D}), |\ |_{g_{\mathcal{D}}})$.