

$K = \text{cuerpo de números}$

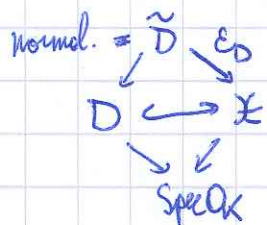
$X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$, superficie regular, proyectiva, $X \otimes K$ geométricamente irred.

$X(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} X_\sigma$, sup de Riemann comp. conexos.

Fixamos $\mu = (\mu_\sigma)_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}}$ colección finitas volúmenes con $\sum_{\sigma} \mu_\sigma = 1$
 $\Rightarrow \text{Pic}(\hat{X}, \mu)$

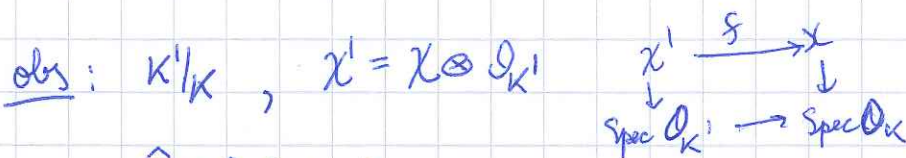
Teo: Existe una única aplicación bilineal $(,) : \text{Pic}(\hat{X}, \mu) \times \text{Pic}(\hat{X}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

(i) $D \subset X$ es un divisor irred., horizontal y reducido
 $\Rightarrow \forall \hat{L} \in \text{Pic}(\hat{X}, \mu)$, se tiene que $(\hat{L}, \hat{D}) = \deg \mathcal{E}_D^*(\hat{L})$.



(ii) $D \subset X$ divisor vertical $\subset X \otimes \mathbb{F}_v$; $v \in \text{Spec } \mathcal{O}_K, v \neq \infty$
 $(\hat{L}, \hat{D}) = \underbrace{\int_D \log(\#k(v))}_{\text{grado geométrico}} \quad \mathbb{F}_v = k(v) = \text{cuerpo residual.}$

(iii) $(,)$ es simétrico.



$\forall_{\hat{L}, \hat{M}} \hat{L} \in \text{Pic}(\hat{X}, \mu)$
 $\Rightarrow (f^* \hat{L}, f^* \hat{M})_{X'} = [K':K] \cdot (\hat{L}, \hat{M})_X$

En ∞ : $X'(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\tau: K' \hookrightarrow \mathbb{C}} X_\tau = \bigsqcup_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \bigsqcup_{\tau: K' \hookrightarrow \mathbb{C}} X_\tau$
 $\tau|_K = \sigma$
 $[K':K]$ copias de X_σ

Fórmula de adyacencia: Suponer X semistable ($\chi \otimes K \geq 1$) (2)

$\omega = \omega_X|_{\text{spec } \mathcal{O}_K}$, $\mu =$ forma de Arakelov, $X = \text{sup. Poincaré compacto } g \geq 1$

$\omega_1, \dots, \omega_g$ base de Ω_X^1 , ortogonal (c.v. $(r, \eta) \mapsto \int_X r \wedge \bar{\eta}$)

$\mu_{AR} = \frac{i}{2g} \sum_{i=1}^g \omega_i \wedge \bar{\omega}_i$, $\int_X \mu_{AR} = 1$ en $X(\mathbb{C})$, ponemos $\mu_{AR} = (\mu_{AR, \sigma})_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}}$.

$\Rightarrow \hat{\omega} \in \hat{\text{Pic}}(X, \mu_{AR})$

Teorema: Sea D un divisor horizontal reductible sobre X .

Escribamos $D(\mathbb{C}) = \sum_{\sigma} [P_{\sigma}]$, $K' =$ cuerpo de D .

$$\Rightarrow \hat{D} \cdot \hat{D} + \hat{D} \cdot \hat{\omega} = \log \left[\underbrace{N_{K'/K}}_{\in \mathbb{N}} \left(\frac{\text{disc}(K'/K)}{\in \mathbb{N}} \right) \right] + \sum_{\sigma \neq \tau} g(P_{\sigma}, P_{\tau})$$

$g =$ la función de Green asociada a μ_{AR} .

Alturas: X, μ cualquiera, $\hat{L} \in \hat{\text{Pic}}(X, \mu)$ con L amplio.

Si $P \in X(K')$ donde K'/K extensión finita $\text{spec } \mathcal{O}_{K'} \xrightarrow{\simeq} X \downarrow \text{spec } \mathcal{O}_K$

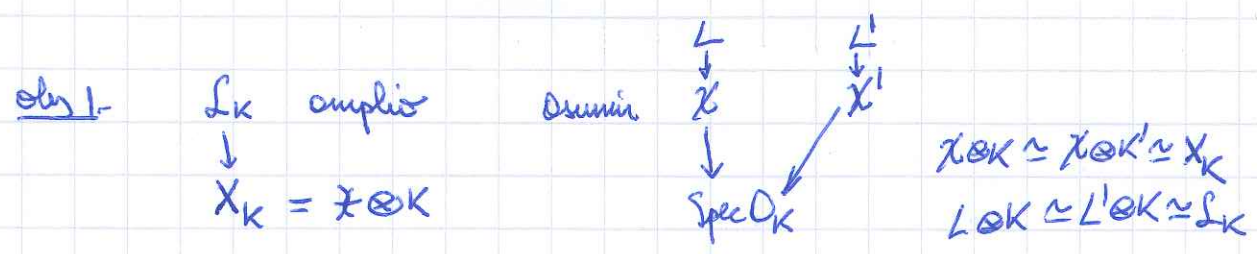
$$\text{Deg: } h_{\hat{L}}(P) := \frac{\text{deg } s^*(\hat{L})}{[K':K]} = \frac{\widehat{\text{Imagen}}(s) \cdot \hat{L}}{[K':K]}$$

$$\text{Si } \begin{array}{ccc} \text{spec } \mathcal{O}_{K''} & \xrightarrow{s''} & X'' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \text{spec } \mathcal{O}_{K'} \rightarrow X \end{array} \quad \frac{\text{deg } s''(\hat{L})}{[K'' : K]} = \frac{[K'' : K'] \text{deg } s(\hat{L})}{[K'' : K'] \cdot [K' : K]}$$

$$\therefore h_{\hat{L}} : X(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Propiedad: X amplio $\Rightarrow \forall A, B > 0$

$\{P \in X(\bar{K}) : h_{\hat{L}}(P) \leq A, [Q(P) : Q] \leq B\}$ es finito.



\Rightarrow Entonces $\exists C > 0$ tal $\forall P \in X_K(\bar{K})$, $|h_{L'}^{\wedge}(P) - h_L^{\wedge}(P)| \leq C$.

Si fijamos X y cambiamos el fibrado amplio, similar si solo cambiamos μ .

Ej 1- $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, $L = \mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(\infty)$, $P = [a:b]$; $a, b \in \mathbb{Z}$ $\text{med}(a,b) = 1$
 $\infty = [1,0]$, $\Delta = X_{\infty}$, $\|\Delta\| = \frac{|\Delta(a,b)|}{\max\{|a|, |b|\}}$

$\Rightarrow h_{\mathcal{O}_X(1)}([a:b]) = \log \max\{|a|, |b|\}$.

Otro controla el tamaño de los coeficientes del pol. minimal.

Teo de Ullmo: X semistable, $\hat{X} \in \text{Pic}(X, \mu)$, $s \in L$
 $\|\Delta\|_{\text{sup}} = \max_{P \in X(\mathbb{C})} \|\Delta(P)\|$

$H^0(X, \hat{L}) = \{ \text{secciones efectivas} \} = \{ s \in L : \|\Delta\|_{\text{sup}} \leq 1 \}$
 $(\Leftrightarrow -\log \|\Delta\|_{\text{sup}} \geq 0)$
 $H^0(X, L)$ es un \mathbb{Z} -módulo.

Def: \hat{L} se dice numéricamente positivo si
 i) $(\hat{L}, \hat{L}) > 0$ ii) $(\hat{L}, \hat{D}) > 0 \forall D \subset X$ irred.

Def: \hat{L} es aritméticamente amplio si $\forall \hat{m} \in \text{Pic}(X, \mu)$ $\exists n_0$
 $\forall n \geq n_0$ $H^0(X, L^{\otimes n} \otimes \hat{m})$ admite una \mathbb{Z} -base formada por secciones efectivas.

Teo (Zhang) \hat{L} numéricamente positivo $\Rightarrow \hat{L}$ es aritméticamente amplio.

Más precisamente la \mathbb{Z} -base de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes M)$ se puede escoger tal que $\| \cdot \|_{\text{sup}} \leq e^{-cn}$ con algún $c(L, M, \text{todo}) > 0$ adecuado.

Teo (Ullmo) $X \rightarrow \text{Spec } O_K$ semiestable. Sea $Z \subset X$ la imagen de una sección. Entonces $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \exists s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ con $s \neq 0$ y $\|s\|_{\text{sup}} < 1$ y tal que $|\text{div}(s)| \cap Z = \emptyset$, donde X es numéricamente positivo.
 no hay intersección fuerte.

Teo (Ullmo) $X \rightarrow \text{Spec } O_K, \hat{L}$, mínimos hipotéticos. $Z \subset X$ una sección y $X^\circ = X - Z$. Entonces existe un punto entero $P \in X^\circ$ tal que

$$h_{\hat{L}}(P) \leq \frac{\hat{L} \cdot \hat{L}}{(\text{deg } L) \cdot [K:\mathbb{Q}]} \quad (\checkmark).$$

calculable.

[Existe punto en $\overline{\mathbb{Z}}$]

Dem Sea $s \in \mathcal{L}^{\otimes n}$ como en el teorema de Ullmo $\Rightarrow \text{div}(s) = \underbrace{V}_{\text{vertical}} + \sum_{i=1}^{n \text{ deg } L} \underbrace{E_i}_{\text{horizontal section}} \quad (*)$

$E_i \hookrightarrow P_i \in X(K')$; K'/K extensión fuerte
los P_i son " \mathbb{Z} -enteros" i.e., $|E_i| \cap |Z| = \emptyset$.

en $(*)$, $(\cdot \hat{L}) : (\text{div}(s) \cdot \hat{L}) = (\underbrace{V \cdot \hat{L}}_{\geq 0}) + \sum_{i=1}^{n \text{ deg } L} (E_i \cdot \hat{L})$
 $n \binom{\hat{L}^{\otimes n} \cdot \hat{L}}{\hat{L} \cdot \hat{L}}$ (ya que es geom. amplio)

$\therefore n(\hat{X} \cdot \hat{L}) \geq n \cdot (\text{deg } L) \underbrace{\min(E_i \cdot \hat{L})}_{h_{\hat{L}}(P_i) [K:\mathbb{Q}]} \Rightarrow (\checkmark).$