# Menores II: Fibrados metrizados.

$X$ = superficie de Riemann compacta

$L \xrightarrow{\pi} X$ fibrado en rectas ($\Leftrightarrow$ haz invertible)

Ejl.- $L$ = 1-formas holomorfas

$\mathcal{U} \subset X$ abierto, $H^0(\mathcal{U}, L) = \{$secciones en $\mathcal{U}\} = \{s : \mathcal{U} \to L, \pi \circ s = id_{\mathcal{U}}\}$

Def.- Una métrica en $L$ es una regla que a cada abierto $\mathcal{U} \subset X$ y cada $s \in H^0(\mathcal{U}, L)$ le asocia una función continua $\|s(\cdot)\| : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

i) compatible c/r a restr. con abiertos más pequeños.

ii) $\forall p \in \mathcal{U}$, $\|s(p)\| = 0 \Leftrightarrow s(p) = 0$.

iii) $\forall p \in \mathcal{U}$, $\forall \lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, holomorfa, $\|(\lambda s)(p)\| = |\lambda(p)| \, \|s(p)\|$

El par $\hat{L} = (L, \|\cdot\|)$ es un fibrado metrizado.

Ejl.- $X = \mathbb{P}^1$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = \left\{ \begin{array}{c} \text{funciones racionales hom. de grado 1 en } \mathbb{C}(x_0, x_1) \\ \text{sin polos en } \mathcal{U} \end{array} \right\}$

Sea $s \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$

$$\|s(x_0 : x_1)\|_{can} = \frac{|s(x_0, x_1)|}{\max\{|x_0|, |x_1|\}} \qquad \|s(x_0 : x_1)\|_{FS} = \frac{|s(x_0, x_1)|}{\sqrt{|x_0|^2 + |x_1|^2}}$$

Operación: $\hat{L}_1 = (L_1, \|\cdot\|_1)$, $\hat{L}_2 = (L_2, \|\cdot\|_2)$, entonces $\hat{L}_1 \otimes \hat{L}_2 = (L_1 \otimes L_2, \|\,\|_3)$

Donde $\|\,\|_3$ se define como: $s_1 \in H^0(\mathcal{U}, L_1)$, $s_2 \in H^0(\mathcal{U}, L_2)$,

$$\|s_1 \otimes s_2(p)\|_3 = \|s_1(p)\|_1 \cdot \|s_2(p)\|_2$$

$s$ una sección racional (loc cuociente de secciones locales) $\rightsquigarrow$ div $s$ = ceros − polos

$g_s = -\log \|s\|$ es una función de Green para div $s$.

Dado un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ y $g$ una función de Green para $D$

$\mathbb{Z}[i][x,y]/(x^2+y^2)$
$\uparrow$
$\mathbb{Z}[i]$

$K[x,y]/(x^2+y^2)$
$\downarrow$
$\mathbb{C} \supset K = \mathbb{Z}(i)$

$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathcal{X}$
$\downarrow \qquad \downarrow$
$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$



$L = \mathcal{O}_X(D)$, $s \in L$, $\|s\| = e^{-g}$.

Superficies Aritméticas $\quad \mathcal{X}$ = sup. aritmética, reg., proj.
$\downarrow$
$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$

$K$ = cuerpo de números, $\mathcal{O}_K$ = anillo de enteros. Tenemos $\mathcal{L} \to \mathcal{X}$ fibrado en rectas.

Sean $\underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}_{\text{incrustaciones}} : K \to \mathbb{C}$, $\quad \mathcal{X}(\mathbb{C}) = \coprod_{i=1}^{n} \underbrace{X_i}_{\text{Sup. de Riemann compacta}}$.

Def.- Un fibrado (aritmético) metrizado es $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|^n)$ donde $\|\cdot\|_i$ es una métrica en el fibrado.

Superficies aritméticas: altura asociada a un fibrado metrizado

$\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}) = \{\hat{\mathcal{L}}$ fibr. metrizado$\}/$isometría es un grupo

$\mathrm{Pic}^a(\mathcal{X})$ = los que tienen func. de Green admisibles $\subset \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})$

$\exists$ una aplicación lineal $\mathrm{Pic}^a(\mathcal{X}) \times \mathrm{Pic}^a(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$
$$(\hat{\mathcal{L}}_1, \hat{\mathcal{L}}_2) \mapsto \hat{\mathcal{L}}_1 \cdot \hat{\mathcal{L}}_2$$

$$\hat{\mathcal{L}}_1 \cdot \hat{\mathcal{L}}_2 = \underbrace{(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)_{fin}}_{\text{int. geom}} + (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)_\infty, \quad (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)_\infty = \sum_{i=1}^{n} -\log \|s_1\|_i (\mathrm{div}\, s_2)$$

$s_1$ = sección de $\mathcal{L}_1$, $s_2$ = sección de $\mathcal{L}_2$ $\quad D = \sum n_p [P]$, $f$ función
$f(D) = \sum n_p f(P)$

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2)_\infty \approx \int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} -\log \|s_1\| \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \|s_2\| \, dz \wedge d\bar{z}$$

Def.- $\hat{\mathcal{L}} \in \mathrm{Pic}^a(\mathcal{X})$, $P \in \mathcal{X}(K) \Rightarrow$ tenemos sección $s_p : \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K \to \mathcal{X}$
$\mathcal{L}_p = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Im}\, s_p)$. Lo metrizamos de manera que quede admisible
$\hat{\mathcal{L}}_p = (\mathcal{L}_p, \|\cdot\|)$. Luego,
$$h_{\hat{\mathcal{L}}}(P) = \frac{\hat{\mathcal{L}} \cdot \hat{\mathcal{L}}_p}{[K:\mathbb{Q}]} \in \mathbb{R}.$$

se puede y luego métrica única

Ejm clásico: $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, $\|\cdot\|_{can}$.

Bogl $h_{\hat{\mathcal{L}}}$ es una función altura "buena" $\Leftrightarrow$ $\hat{\mathcal{L}}$ es "positivo".

<u>Amplitud aritmética</u>: $\hat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|_i)$ se dice aritméticamente amplio si

i) $\mathcal{L}$ es amplio ($\forall \mathcal{F}$, $\exists n_0 / \forall n \geq n_0$, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ es generado por secciones globales)

ii) $\forall$ fibrado $\hat{M}$ $\forall n \gg 0$, el $\mathbb{Z}$-módulo libre $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes M)$ posee una base formada por secciones de norma $<1$ en todo lugar $\infty$.

<u>Teo</u> (Zhang): Si $\hat{\mathcal{L}}^2 > 0$, $\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{L}}$ es aritméticamente amplio.
+ hipótesis fibras finitas

<u>Teo</u> (Ullmo): $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ semiestable y $\hat{\mathcal{L}}$ fibrado aritméticamente amplio
$\Rightarrow$ $\exists P \in \mathcal{X}(K)$, entero algebraico, con

$$h_{\hat{\mathcal{L}}}(P) \leq \frac{\hat{\mathcal{L}}^2}{(\deg \mathcal{L})\,[K:\mathbb{Q}]}.$$