Lenguaje de haces (Sheaves) por Menoes III

Def: X esp. topológico. Un pre-haz $\mathcal{F}$ consiste en:
i) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq X$, abierto, $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ es un grupo abeliano.
ii) $\forall\, V \subseteq \mathcal{U}$, abierto, un morfismo $\rho_{\mathcal{U}V} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(V)$ restricción.
Tales que
1) $\mathcal{F}(\phi) = (0)$ 2) $\rho_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = 1\!\!1_{\mathcal{U}}$ 3) $W \subseteq V \subseteq \mathcal{U}$ abiertos $\Rightarrow \rho_{\mathcal{U}W} = \rho_{VW} \circ \rho_{\mathcal{U}V}$.

Notaciones: $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow$ sección de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{U}$, $\rho_{\mathcal{U}V}(s) =: s|_V$ $V \subseteq \mathcal{U}$.

Un pre-haz es un haz si además:
4) $\forall \{\mathcal{U}_i\}$ recubrimiento abierto $\mathcal{U}$
si $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ y $s|_{\mathcal{U}_i} = 0 \Rightarrow s = 0$ (unicidad)
5) Sean $\{s_i\}$, $s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$. Si $\forall i,j$ $s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$
$\Rightarrow \exists\, s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que $s|_{\mathcal{U}_i} = s_i$ $\forall i$.

Obs: Todo pre-haz tiene un haz asociado canónicamente. Por otro lado, anillos, modulos etc. pueden ser usados también.

Ej: $C(\mathcal{U}) := \{ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \text{ continua} \}$

Obs: $\mathcal{B}$ = base de vecindades. Un $\mathcal{B}$-haz se define como un haz reemplazando abierto por elementos de la base $\mathcal{B}$. Un $\mathcal{B}$-haz define un haz
$\mathcal{F}(\mathcal{U}) := \{ (s_i) \in \prod \mathcal{F}(\mathcal{U}_i),\ \mathcal{U}_i \in \mathcal{B},\ \forall i,j\ s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} \}$

Localizar: $\mathcal{F}$ haz, $x_0 \in X$.
$C_{x_0} = \{ (s, \mathcal{U}) ;\ s \in \mathcal{F}(\mathcal{U}) ;\ \mathcal{U} \text{ vecindad de } x_0 \}$
$(s, \mathcal{U}) \sim (s', \mathcal{U}') \Leftrightarrow s|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} = s'|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'}$.

Def: $\mathcal{F}_{x_0} = C_{x_0}/\sim \;=\; \varinjlim_{x_0 \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(\mathcal{U})$, el tallo de $\mathcal{F}$ en x_0 (stalk, tige)

Morfismo natural: $x_0 \in \mathcal{U}$, $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}_{x_0}$
$s \longmapsto s_{x_0} := \overline{(s, \mathcal{U})}$.

Prop: $s, t \in \mathcal{F}(X)$ tales que tienen $\forall x_0 \in X$, $s_{x_0} = t_{x_0}$
$\Rightarrow s = t$.

Morfismos: $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ haces $/_X$. Un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$
consiste en $\forall U \subseteq X$ abierto, $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ compatible.

Obs/ $\forall x_0 \in X$, α induce $\alpha_{x_0} : \mathcal{F}_{x_0} \to \mathcal{G}_{x_0}$.

Def/ α inyectivo $\Leftrightarrow \forall x_0 \in X$, α_{x_0} lo es.
α sobre $\Leftrightarrow \forall x_0 \in X$, α_{x_0} lo es.

Obs/ α inyectivo $\Leftrightarrow \alpha(U)$ es 1-1. Pero sobre no funciona. Por ejemplo,
$X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathcal{F}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa $\}_+$ y $\mathcal{G}(U) = \{ f : U \to \mathbb{C}^*$ hol.
y $\frac{1}{f}$ holomorfa $\}_\bullet$

$\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, $f \mapsto e^f$. Morfismo grupos pero
$\alpha(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ no es sobreyectivo (eg. $i_0|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \neq e^f$ sino $\exists \log$)
Veamos que es sobre: $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g_{x_0} \in \mathcal{G}_{x_0}$ y $g \neq 0$ en U
$\therefore$ $\exists$ vecindad V de $g(x_0)$ y $\log : V \to \mathbb{C}$ función holomorfa.
Luego $f := \log g : g^{-1}(V) \cap U \to \mathbb{C} \Rightarrow (f, g^{-1}(V)) \longmapsto g_{x_0}$.

Prop/ Si α es 1-1 y sobre $\Rightarrow \forall U \subseteq X$, $\alpha(U)$ también lo es.

→ Espacios localmente anillados

Def/ A anillo local es el cual tiene un único ideal maximal.

Def/ Un par $(X, \mathcal{O}_X)$ se dice espacio localmente anillado si
i) X esp top
ii) $\mathcal{O}_X$ haz de anillos con $\mathcal{O}_{X,x_0}$ anillo local.

$\mathcal{O}_X$ se llama haz estructural.

Def.- Dado $x_0 \in X$, $\mathfrak{m}_{x_0}$ = el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x_0}$

$\mathcal{O}_{X,x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} =: k(x_0)$ cuerpo residual.

Ej.- $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U})$ = funciones holom. en $\mathcal{U}$.

loc. anillado $x_0 \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{m}_{x_0} = \{ s_{x_0} = (s, \mathcal{U}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},x_0},\ s(x_0) = 0 \}$

Vemos que $\mathfrak{m}_{x_0}^c = \mathcal{O}^*_{\mathbb{C},x_0}$ ✓

Cuerpo residual, $\mathcal{O}_{\mathbb{C},x_0} \xrightarrow{ev_{x_0}} \mathbb{C}$, morfismo evaluación.

$\mathcal{O}_X$-mod $\mathcal{M}$ es un haz tq $\forall \mathcal{U} \subseteq X$, $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ tiene estr. de $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-mod. compatible con la restricciones.

M_1, M_2 $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{U} \mapsto M_1(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{O}_X(\mathcal{U})} M_2(\mathcal{U})$ es un pre-haz

$M_1 \otimes M_2$ = haz asociado. Es un $\mathcal{O}_X$-modulo.

Obs.- $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{M}$, $\forall \mathcal{M}$ $\mathcal{O}_X$-mod.

Def.- $\mathcal{M}$ se dice invertible si $\forall x_0 \in X$, $\exists$ vecindad $\mathcal{U}$ y un isomorfismo $\mathcal{M}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ compatible con las restricciones.

Prop.- $\mathcal{M}$ es invertible $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\mathcal{O}_X$-modulo $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_X$.

$[\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(\mathcal{U})}(\mathcal{M}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_X(\mathcal{U}))]$

Ej.- $X = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ = funciones holom, $\mathcal{M} = \Omega^1$, $\Omega^1(\mathcal{U}) = \{1$-formas holom en $\mathcal{U}\}$.

Curvas aritméticas.

Ej: K = cuerpo de números, $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) = \{P \subseteq \mathcal{O}_K \text{, ideal primo}\}$
donde $\mathcal{O}_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$.

Topología: $V \subseteq X$ es cerrado si o bien $V = X$ o bien $V \notin X$ y
i) $(0) \notin V$ ii) V es finito.
[Topología de Zariski]

Base de vecindades: $f \in \mathcal{O}_K$, $f \neq 0$, $(f) = P_1^{e_1} \cdots P_r^{e_r}$
P_i ideales primos distintos, $V(f) := \{P_1, \dots, P_r\}$, $D(f) = V(f)^c$.

Haz estructural: $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_{K,(f)} = \{\alpha \in K : \alpha = \frac{a}{f^n} \; a \in \mathcal{O}_K,\; n \geq 0\}$

[En efecto todo abierto es un $D(f)$] "funciones meromorfas en X" con polos en $V(f)$.

<u>Yo</u>: Fibrados metrizados en $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$. (8 Mayo)