# Grupo de clases y grupo de Picard sobre un cuerpo de números

Matías Alvarado
Universidad de Chile

Abril 2018

En todo lo que sigue $K$ denotará un cuerpo de números, y llamaremos $X$ al espacio topológico $Spec\ \mathcal{O}_K$

## 1 Introducción

A continuación demostraremos que el grupo de Picard de $X$ y el grupo de clases del anillo de enteros de un cuerpo de números ($\mathcal{O}_K$) son isomorfos.

## 2 Preliminares

**Definición 1.** *Un $\mathcal{O}_X$-módulo invertible es un haz $\mathcal{F}$ tal que existe otro haz $\mathcal{G}$, con $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \simeq \mathcal{O}_X$. Equivalentemente se dice que $\mathcal{F}$ es invertible si existe un cubrimiento $\{U_i\}$ de $X$ con $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_X|_{U_i}$.*

**Definición 2.** *El conjunto de clases de isomorfía de $\mathcal{O}_X$-módulos invertibles es un grupo con la operación de producto tensorial de haces. A este grupo se le llama el grupo de Picard de $X$, y se denota por $Pic(X)$.*

**Definición 3.** *Dado un cuerpo de números $K/\mathbb{Q}$, definimos su anillo de enteros como*

$$\mathcal{O}_K = \{a \in K | a \text{ satisface un polinomio mónico con coeficientes en } \mathbb{Z}\}$$

## 3 $\mathcal{O}_X$-módulos como ideales de $\mathcal{O}_K$

**Definición 4.** *Si $M$ es un $A$-módulo proyectivo, $M$ se dice de rango $n$ si es finitamente generado y el rango de $M_\mathfrak{p}$ es $n$ como $A_\mathfrak{p}$-módulo para todo ideal primo $\mathfrak{p}$.*

A priori no es para nada obvio que esté bien definido el rango, en el sentido que no necesariamente los rangos locales serán iguales, pero para módulos proyectivos el rango define una función localmente constante en $Spec(A)$. Para más detalles ver [Teorema 1, Capitulo 5, Commutative algebra, Bourbaki].

**Teorema 5.** *Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo invertible, entonces el módulo de secciones globales $\mathcal{M}(X)$ es un $\mathcal{O}_K$-módulo proyectivo de rango 1.*

La demostración de este teorema es consecuencia de los siguientes lemas.

**Lema 6.** *Si $A$ es un anillo y $M, N$ son $A$-módulos tales que $M \otimes_A N \simeq A$, entonces $M$ es finitamente generado.*

*Demostración.* Tenemos que $A \simeq M \otimes_A N$, luego $1 \mapsto \sum m_i \otimes n_i$, así si definimos $M_0$ como el submódulo generado por los $m_i$ que aparecen en la imagen de 1, tendremos $M_0 \otimes_A N \simeq A$. Luego concluimos el resultado de la siguiente cadena de isomorfismos. $M \simeq M \otimes_A A \simeq M \otimes_A (M \otimes_A N) \simeq M \otimes_A (M_0 \otimes_A N) \simeq M_0 \otimes_A A \simeq M_0$

□

**Lema 7.** *Si $M$ es finitamente generado tal que $M \otimes_A N \simeq A$, entonces $M$ es un $A$-módulo proyectivo de rango 1.*

*Demostración.* supondremos por ahora la siguiente afirmación: $M$ es proyectivo de rango 1 si y solo si para todo ideal primo $\mathfrak{p}$, el $A_\mathfrak{p}$módulo $M_\mathfrak{p}$ es libre de rango 1. Usando este hecho nos reducimos primero al caso local (nos queda afuera solo el ideal (0)). El isomorfismo $M \otimes_A N \simeq A$, induce un isomofismo a nivel de $k := A/\mathfrak{m}$- espacios vectoriales

$$(M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{m}N) \simeq k$$

De esta manera $M/\mathfrak{m}M$ es de dimensión 1, luego $M$ es generado por un elemento (ver Prop 2.8 Atiyah MacDonald). Por otra parte si $F = Quot(A)$, y $M \otimes_A N \simeq A$, entonces $(M \otimes_A F) \otimes_F (N \otimes_A K) \simeq F$. Luego $M \otimes_A F$ (que es la localización de $M$ en el ideal (0)) es libre de rango 1. Luego se concluye el resultado.

□

Ahora nos falta probar la afirmación que quedó pendiente.

**Proposicion 8.** *Sea $M$ un $A$-módulo finitamente generado, entonces $M$ es proyectivo de rango 1 si y solo si para todo ideal primo $\mathfrak{p}$, el $A_\mathfrak{p}$-módulo $M_\mathfrak{p}$ es libre de rango 1.*

*Demostración.* Una dirección se tiene por definición, si suponemos que el rango está bien definido. Por otra parte, supongamos que el módulo $M$ es libre y de rango 1 en todas las localizaciones en primos $\mathfrak{p}$, entonces queremos probar que es un módulo proyectivo, es decir que el functor $Hom(M, -)$ es exacto por derecha. Sean $N_1, N_2$ dos $A$-módulos, tal que exista una aplicación $N_1 \to N_2 \to 0$, luego aplicamos $Hom(M, -)$, con lo que obtenemos $Hom(M, N_1) \to Hom(M, N_2)$, morfismo que queremos verificar que es sobreyectivo, para eso localizamos en $\mathfrak{p}$, así obtenemos un morfimo $Hom(M, N_1)_\mathfrak{p} \to Hom(M, N_2)_\mathfrak{p}$ Ahora usamos que $Hom_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) \simeq Hom(M, N)_\mathfrak{p}$, este es un hecho de álgebra conmutativa, y se tiene cuando el módulo $M$ es finitamente presentado. Luego el morfismo entre $Hom$ localizados se transforma en $N_{1,\mathfrak{p}} \to N_{2,\mathfrak{p}}$ que es sobreyectivo para todo $\mathfrak{p}$ primo (esto pues Como $M_\mathfrak{p} \simeq A_p$, se tiene que $Hom_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) \simeq N_\mathfrak{p}$ ).

Luego el morfimo entre $Hom$ será sobreyectivo. Así se concluye la proyectividad del módulo $M$.

□

Hasta ahora obtuvimos a partir de un $\mathcal{O}_X$-módulo invertible, un $\mathcal{O}_K$-módulo proyectivo de rango 1. Lo que haremos ahora, es presentar la teoría de ideales fraccionarios sobre el anillo $\mathcal{O}_K$, y luego probar que este módulo $\mathcal{M}(X)$ es isomorfo a un ideal de $\mathcal{O}_K$.

# 4 ideales en el anillo de enteros de un cuerpo de números

**Teorema 9.** *Sea $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ un ideal, entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r$, con $\mathfrak{p}_i$ primo.*

**Definición 10.** *Un ideal fraccionario de $K$ es un $\mathcal{O}_K$-módulo finitamente generado de $K$.*

Como $\mathcal{O}_K$ es un anillo noetheriano, todo ideal es un ideal fraccionario.

**Teorema 11.** *El conjunto de ideales fraccionarios forman un grupo abeliano que denotaremos por $\mathcal{J}_K$.*

*Demostración.*

- La identidad es el ideal fraccionario (1)=$\mathcal{O}_K$

- El inverso de un ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ es el conjunto

$$\mathfrak{a}^{-1} = \{x \in K | x\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K\}$$

$\square$

**Definición 12.** *(Grupo de clase) Sea $\mathcal{P}_K$ el subgrupo de ideales fraccionarios principales. Al cuociente $\mathcal{J}_K/\mathcal{P}_K$ lo llamamos grupo de clase de $K$ y lo denotamos por $Cl(K)$.*

Ahora que conocemos la teoría de ideales sobre un anillo de enteros, vamos a probar que un módulo proyectivo de rango 1 es isomorfo como módulo a un ideal del anillo $\mathcal{O}_K$, de esta manera vamos a tener un aplicación que manda $\mathcal{O}_X$-módulos invertibles en ideales fraccionarios de $K$.

**Proposicion 13.** *Si $M$ es un módulo proyectivo de rango 1 sobre $\mathcal{O}_K$, entonces existe un ideal $\mathfrak{a}$ tal que $M \simeq \mathfrak{a}$*

*Demostración.* Sea $F$ el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_K$, tensorizando $M$ con $K$ obtenemos un espacio vectorial $V$ sobre $K$. Además tenemos un morfimos natural inyectivo $M \to M \otimes K$. Observamos que este espacio vectorial es de dimensión 1, pues $V$ es el módulo localizado en cero, y por hipótesis el rango de $M$ es 1. Luego podemos tomar una base de $V$, digamos $\{v\}$, tal que, cualquier elemento $m \in M$ se escriba como $am$ con $a \in A$. Si definimos para $w \in V$ $\lambda(w) = b$ donde $w = vb$, entonces $\lambda(M) \subset A$. Asi tomando $\mathfrak{a} = \lambda(M)$ tenemos que $\mathfrak{a}$ es un ideal isomorfo a $M$ vía la función de proyección $\lambda$. $\square$

# 5 Equivalencia entre $Pic(X)$ y $Cl(K)$

Lo que debemos probar es en cierto sentido la inyectividad y sobreyectividad de la función que asocia a cada $\mathcal{O}_X$-módulo un ideal fraccionario de $K$. Para esto bastará con probar las dos siguientes proposiciones.

**Proposicion 14.** *Sea $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ $\mathcal{O}_X$-módulos invertibles isomorfos, es decir definen el mismo elemento en $Pic(X)$, entonces los ideales fraccionarios definidos por ellos son equivalentes, es decir, definen el mismo elemento en el grupo de clase $Cl(K)$.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{a}_1$ el ideal asociado a $\mathcal{M}_1$, y $\mathfrak{a}_2$ el ideal asociado a $\mathcal{M}_2$. entonces $\mathfrak{a}_1 \simeq \mathcal{M}_1(X) \simeq \mathcal{M}_2(X) \simeq \mathfrak{a}_2$. Asi $\mathfrak{a}_1{\mathfrak{a}_2}^{-1} \simeq A$, luego $\mathfrak{a}_1{\mathfrak{a}_2}^{-1} \in \mathcal{P}_K$. Con lo que concluimos que $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ en $Cl(K)$ $\square$

**Proposicion 15.** *Todo ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ en $K$ define un $\mathcal{O}_X$-módulo invertible.*

*Demostración.* Por abuso de notación usaremos $\mathfrak{a}$ para denotar el ideal fraccionario y el $\mathcal{O}_X$-módulo. Definimos el $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathfrak{a}$, por $\mathfrak{a}(D(f)) = \mathfrak{a}_f$. De esta manera vemos que $\mathfrak{a}(D(f))$ es un $\mathcal{O}_{K,f} = \mathcal{O}_X(D(f))$-módulo. Además si hacemos uso del hecho que los abiertos principales son base de la topología, obtenemos un haz en todo $X$.

Ahora resta verificar que es invertible. Para eso consideremos $\mathfrak{b}$ el ideal fraccionario que es el inverso en el grupo de ideales fracionarios. De forma analoga, $\mathfrak{b}$ define un un $\mathcal{O}_X$ módulo. Es fácil verificar que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a} \otimes_A \mathfrak{b}$ como $A$-módulos. Entonces

$\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_{K,f} \simeq (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_f \simeq (\mathfrak{a} \otimes_A \mathfrak{b})_f \simeq \mathfrak{a}_f \otimes_{A_f} \mathfrak{b}_f = \mathfrak{a}(D(f)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(f))} \mathfrak{b}(D(f))$ $\square$