GIAN, 17/Abril/18

Grupo compactificado de Picard para $\mathcal{O}_K$

K = cuerpo de números, $\mathcal{O}_K = \{ a \in K : a \text{ integral sobre } \mathbb{Z} \} = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$

Ejlr d libre de cuadrados y entero $\Rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = K$ y

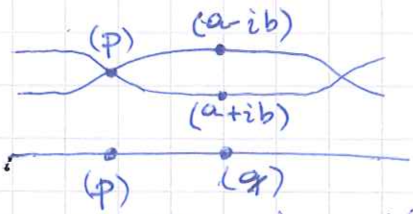
$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{si } d \equiv 2 \text{ ó } 3 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{d})\right] & \text{si } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} \qquad 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

por ejemplo $\mathbb{Z}[i]$ (dom. Euclidiano) y $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (no es UFD).

En general, $\mathcal{O}_K$ es un Dominio de Dedekind: dominio Noetheriano de dim 1 e integralmente cerrado ($\Leftrightarrow \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \neq 0$, es un anillo de valuación discreta DVR)

DVR: valuación $K^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z}$ $\quad v(xy) = v(x) + v(y) \quad v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$

$\text{DVR} = \{ a \in K^* : v(a) \geq 0 \} \cup \{0\}$, $\mathfrak{m} \subset \text{DVR}$, $\mathfrak{m} = (t)$

Ejlr 

Spec $\mathbb{Z}[i]$
$\downarrow$
Spec $\mathbb{Z}$

si $p = 2$ ó $p \equiv 3(4)$ si $q = 1(4)$ de donde $q = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{Z}$.
(sólo ramificado en $(p) = (2)$)

Spec$(\mathcal{O}_K)$ 

"Curva suave" con $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ DVR y $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}$ = cuerpo finito si $\mathfrak{p} \neq (0)$ (pensarlo todo sobre Spec $\mathbb{Z}$: en general si $A \subseteq B$ anillos, B integral sobre A, $\mathfrak{q} \subseteq B$ primo $\Rightarrow$ $\mathfrak{q}$ max $\Leftrightarrow \mathfrak{q} \cap A$ max)

Ejlr $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $(\underbrace{2}_{\text{irred}}, \underbrace{1+\sqrt{-5}}_{\text{irred}}) = \mathfrak{p}$ no es principal

$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_2$, $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ tiene $\mathfrak{m} = \langle 1+\sqrt{-5} \rangle$ $\quad 1+\sqrt{-5} \cdot \dfrac{1-\sqrt{-5}}{3} = 2$, $3 \notin \mathfrak{p}$

En efecto ideales son (α) y $\left(\alpha, \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha\sqrt{-5})\right)$ no principal

($\alpha \in$ ideal con $|\alpha|$ minimal)

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$$

Ya vimos $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K) \overset{\psi}{\simeq} Cl(K)$

$\{\mathcal{O}_K\text{-Modulos proy. rango } 1\}/\text{isom}$ $\qquad$ $\{\text{ideales fraccionarios}\}/\text{principales}$

donde $M \cdot N = M \otimes N$, $M^{-1} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(M, \mathcal{O}_K)$ $\qquad$ donde $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$ $\quad \alpha^{-1} = \{a \in K : a\alpha \subset \mathcal{O}_K\}$

$\psi: M \mapsto \lambda(M)$, $M \hookrightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_K} K \xrightarrow{\sim} K$, λ la composición.

Ej.- $Cl(\mathbb{Q}[i]) = 0$, $Cl(\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]) = \mathbb{Z}/2 = \langle (2, 1+\sqrt{-5}) \rangle$

Por otro lado, $Cl(K) = \mathrm{Div}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K))/\mathrm{Div\text{-}princ.}$

Dado $D = \sum_{p \neq (0)} n_i [p] \mapsto \alpha\beta^{-1}$ donde $\alpha = p_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots p_{i_m}^{n_{i_m}}$ $\quad n_{i_k} > 0$

y $\beta = p_{j_1}^{-n_{j_1}} \cdots p_{j_s}^{-n_{j_s}}$ $\quad n_{j_k} < 0$

Dado $f \in K^*$, $\mathrm{div}(f) = \sum_{p \neq (0)} v_p(f) \cdot [p]$.

$$\Rightarrow Cl(K) = Cl(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)).$$

Teo: $\mathcal{O}_K$ es UFD $\iff Cl(K) = 0$. $\qquad$ [todo ideal primo dist de (0) princ $\underset{\dim 1}{\iff}$ UFD]

$[\mathcal{O}_K = \bigcap_p \mathcal{O}_{K,p}]$

Para $\sqrt{d}$, $d<0$, los UFD son $-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$ $\quad$ [Baker- Stark, 1966] Heegner

Problema: Queremos hacer teoría intersección en $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ lo cual para divisores viene a ser sacar grado (dim 1), y queremos hacerlo en $Cl(K)$. Pero luego necesitamos $\deg(\mathrm{Princ}) = 0$.

Solución: Para una curva casi-proyectiva, miramos su compactificación natural proyectiva (y resolver sing.) $\therefore$ tenemos $\deg(\mathrm{Princ}) = 0$.
¿Pero que hacer con $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$? Arakelov: considere bien los "lugares en ∞".

Def.- Un módulo invertible metrizado es un L módulo invertible junto con un prod. escalar Hermitiano def. positivo no degenerado $\langle\, , \rangle_\sigma$ en $(L \otimes_{\mathcal{O}_K} \sigma(\mathcal{O}_K)) \otimes_{\sigma(\mathcal{O}_K)} \mathbb{C} \simeq L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$ [Como $\mathbb{C}$-esp. vect.], donde σ son las incrustaciones sobre $\mathbb{Q}$ de K en $\mathbb{C}$.

Obs.- # incrustaciones $= r_1 + 2r_2$, r_1 los reales, r_2 los complejos y el 2 cuenta la conjugada. $r_1 + 2r_2 = [K:\mathbb{Q}]$. [eg a través del T. elemento primitivo]

Def.- V esp. vect $/_{\mathbb{C}}$.
Prod. esc. Herm. $(\_,\_): V\times V \to \mathbb{C}$ bilineal, $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ y $(x,y) = \overline{(y,x)}$
pos. no deg $(x,x) =: \|x\|^2 \geq 0$ $\forall x$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$\therefore$ Métrica Hermitiana $\|x-y\|$.

Como nuestro $V = \mathbb{C} \Rightarrow$ dar métrica es dar un $x^{\neq 0}$ con $\|x\| \neq 0$. $\Big\}$ es dar un número en $\mathbb{R}_{>0}$
Si $y,z \in V \Rightarrow y = \lambda x$, $z = \mu x \Rightarrow \langle y, z\rangle = \lambda\bar{\mu}\|x\|^2$.

Para $(V_1, (,)_1)$ $(V_2, (,)_2) \Rightarrow$ a $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ le damos $\|x_1 \otimes x_2\| = \|x_1\|_1 \|x_2\|_2$
y a $V_1^\vee$, $\|\varphi\| = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|_1}$ $\forall x \neq 0$, donde $\varphi_0 : \underset{\text{elegido}}{x_0} \mapsto 1$, así $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_1^\vee \mapsto 1$.

Def.- $(L_1, \|\ \|_{1,\sigma}) \simeq (L_2, \|\ \|_{2,\sigma})$ isométricos si existe $L_1 \overset{\varphi}{\simeq} L_2$ de $\mathcal{O}_K$-mod. tal que $\|\varphi(x)\|_{2,\sigma} = \|x\|_{1,\sigma}$ $\forall x \in L_1$, $\forall \sigma \in \{K \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \mathbb{C}\}$.

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(L,L) = \mathcal{O}_K \Rightarrow \mathrm{Isomorf}_{\mathcal{O}_K}(L,L) = \mathcal{O}_K^\times =$ unidades de $\mathcal{O}_K \Rightarrow (L, \|\ \|_1) \simeq (L, \|\ \|_2)$
$\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{O}_K^\times$ con $\|x\|_{1,\sigma} = |\sigma(u)|\,\|x\|_{2,\sigma}$ $\forall x, \forall \sigma$. Esto ya que $\|\sigma(u) x\|_{2,\sigma} = |\sigma(u)|\,\|x\|_{2,\sigma}$. $\Big[L \otimes_{\mathcal{O}_K} \sigma(\mathcal{O}_K) \xrightarrow[\sigma(\mathcal{O}_K)\text{-mod}]{} L \otimes_{\mathcal{O}_K} \sigma(\mathcal{O}_K)$ $\quad x \otimes z \mapsto ux \otimes z = \sigma(u)(x \otimes z) \Big]$

Teo Tenemos $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K) = \{(L, \|\ \|), \otimes\}/_{\text{isometrías}}$, neutro $= [(\mathcal{O}_K, \|1\|_\sigma = 1)]$

$\therefore$ Tenemos morfismo $\mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K) \to 0$ olvidando las métricas.

$\therefore$ Notar que $(\mathbb{R}_+^\times)^{r_1+r_2} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$, $(x_\sigma)_{\sigma \in \phi = \{1,\dots,r_1+r_2\}} \mapsto \Big(\mathcal{O}_K, \underset{(x_\sigma)_{\sigma\in\phi}}{\overset{(\|1\|_\sigma)}{\shortparallel}}\Big)$
es morfismo de grupos y $\alpha \circ \beta = 0$.

$\therefore$ $\mathcal{O}_K^\times =$ unidades $\xrightarrow{\gamma} (\mathbb{R}_+^\times)^{r_1+r_2}$, $\gamma(u) = (|\sigma(u)|_{\sigma\in\phi})$ es morfismo y $\beta \circ \gamma = 0$.
$\therefore$ $\mu(\mathcal{O}_K) =$ raíces de la unidad $\overset{\delta}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_K^\times$ y $\gamma \circ \delta = 0$

$\therefore$ En efecto $0 \to \mu(\mathcal{O}_K) \to \mathcal{O}_K^\times \to (\mathbb{R}_+^\times)^{r_1+r_2} \to \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K) \to 0$
es exacta.

Definición de grado:

Primero veamos a $\mathrm{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$ como divisores:

$$D = \sum_{\mathfrak{p} \neq (0)} n_{\mathfrak{p}} [\mathfrak{p}] + \sum_{\sigma \in \phi} x_\sigma [\sigma]$$

Pero $f \in K^\times$, $\mathrm{div}(f) = \sum_{\mathfrak{p} \neq (0)} \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f) [\mathfrak{p}] - \sum_{\sigma \in \phi} \underbrace{\varepsilon_\sigma}_{\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathbb{R} \\ 2 \text{ si } \mathbb{C} \end{cases}} \underbrace{\log}_{\text{rareza para tener grado} = 0} |\sigma(f)| [\sigma]$

Luego definir grado como:

$$\deg(D) = \sum_{\mathfrak{p} \neq 0} n_{\mathfrak{p}} \cdot \log(\#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})) + \sum_{\sigma \in \phi} x_\sigma .$$

Por la fórmula del producto: $f \in K^*$, $\prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(f)} = \prod_{\substack{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C} \\ \text{todas}}} |\sigma(f)|$

$\Rightarrow$ $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$.

$\Rightarrow$ Tenemos $\deg : \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O}_K) / \widehat{\mathrm{Princ}}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbb{R}$

morfismo grupo con la suma.

Por otro lado $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O}_K) / \widehat{\mathrm{Princ}}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathrm{Pic}_C(\mathcal{O}_K)$

es isomorfismo, donde

$$\left(\sum n_{\mathfrak{p}} [\mathfrak{p}] + \sum x_\sigma [\sigma] \right) \mapsto \left(L , \|1\|_\sigma = e^{-x_\sigma / \varepsilon_\sigma} \right)$$

<u>CANÓNICO</u>:
$L = \mathfrak{a} \subset K$
$\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_K} K = \mathfrak{a}_{(0)} \ni 1$
$\xleftarrow{\sigma}$
$\xleftarrow{\sigma'}$

y así:

$$0 \to (\mathcal{O}_K) \to \mathcal{O}_K^\times \xrightarrow{\log} (\mathbb{R}_+^\times)^{r_1 + r_2} \longrightarrow \mathrm{Pic}_C(\mathcal{O}_K) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K) \to 0$$

$$\mathrm{Pic}_C(\mathcal{O}_K) \overset{(*)}{\cong} \widehat{\mathrm{Div}}(\mathcal{O}_K) / \widehat{\mathrm{Princ}}(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{\deg} \mathbb{R}$$

(ya que para unidades f, $\prod |\sigma(f)| = 1$)

<u>Cor</u>: $\deg : \mathrm{Pic}_C(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\deg(L, \|x\|_\sigma) = \log \left(\frac{\prod (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^{n_i}}{\prod_{\sigma \in \phi} |x|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}} \right)$$

verlo como divisor