TEOREMA DE RIEMANN-ROCH PARA FIBRADOS METRIZADOS

En lo que sigue, K es un cuerpo de números, $\mathcal{O}_K = \{a \in K : a$ integral sobre $\mathbb{Z}\}$, $\hat{\mathcal{L}}$ fibrado metrizado.

§ Motivación

La definición de fibrado metrizado $\hat{\mathcal{L}}$ nos hace recordar el modelo de teoría analítica de funciones, por lo que es natural preguntarse cómo extender el punto de vista analítico de modo de respaldar los resultados de Teoría de Números de manera geométrica, y cómo darle un sentido aritmético a ciertos teoremas de Análisis. Bajo este marco, el teorema de Riemann-Roch es un resultado que se extrapola a Teoría de Números.

▸ En Análisis:

Sean X superficie de Riemann compacta, $\mathcal{O}_X$ haz de funciones holomorfas. Luego,

$$D = \sum_{a \in X} n_a a \text{ divisor de } X \quad \xleftrightarrow{\text{corresponde}} \quad \text{Fibrado de rectas } L$$
($\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango 1)

Si f es función meromorfa en X, y $a \in X$, entonces

$$\operatorname{ord}_a(f) = \begin{cases} r, & f \text{ tiene un cero de multiplicidad } r \text{ en } a \\ -r, & f \text{ tiene un polo de multiplicidad } r \text{ en } a \end{cases}$$

y $(f) = \sum_{a \in X} \operatorname{ord}_a(f) \cdot a$ es divisor principal de f. Además, $\deg(D) = \sum_{a \in X} n_a$.

Si $U \subset X$ abierto, entonces $\mathcal{M}(U) := \{$funciones meromorfas en $U\}$, $\mathcal{M}_1(U) := \{1$-formas meromorfas en $U\}$.

Dado un divisor D, se definen

$$H^0(X,L) = \{ f \in \mathcal{M}(X) : (f) \geq -D \}$$

$$H^1(X,L) = \{ \omega \in \mathcal{M}_1(X) : \omega \geq D \}$$

El teorema de Riemann-Roch busca calcular $\dim(H^0(X,L))$. Mediante la característica de Euler-Poincaré,

$$\chi(L) = \dim(H^0(X,L)) - \dim(H^1(X,L))$$
$$= \deg(D) + 1 - g, \qquad g \text{ género (genus) de } X$$

Como $D=0 \Rightarrow L = \mathcal{O}_X$ y $\deg(D)=0 \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_X) = 1-g$, se tiene

$$\chi(L) = \deg(D) + \chi(\mathcal{O}_X)$$

- En Teoría de Números:

Hemos visto que, dado un fibrado metrizado $\hat{L} \in \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$, su grado está dado por

$$\deg(\hat{L}) = \log\left(\frac{\prod_{p \neq (0)} \left(\#(\mathcal{O}_K/p)\right)^{n_i}}{\prod_{\sigma \in \emptyset_K} |x|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}} \right), \quad x \in \hat{L}.$$

Ahora bien, dado $\hat{L}$ fibrado metrizado, buscamos calcular la dimensión del conjunto

$$H^0(L) = \{ x \in \hat{L} : |x|_\sigma \leq 1 \quad \forall \sigma \in \emptyset_K \}$$

de secciones globales de $\hat{L}$. Sin embargo, $H^0(L)$ ya no es espacio vectorial a priori, y $H^1(L)$ no se sabe qué es. ¿Cómo calcular $\dim(H^0(L))$?

§ Característica de Euler-Poincaré. Teorema de Riemann-Roch.

Def: Sea $\hat{L} \in \mathrm{Pic}_c(\mathcal{O}_K)$. El número real

$$\chi(\hat{L}) := -\log(\mathrm{vol}(\hat{L}))$$

se define como la CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ de $\hat{L}$.

Obs: Debemos pensar $\hat{L}$ como un reticulado (lattice) en $\bigoplus \hat{L}_\sigma$ ($\simeq \mathbb{R}^{[K:\mathbb{Q}]}$), con $\hat{L}_\sigma = \hat{L} \otimes_\sigma K_\sigma$, donde K_σ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ según σ es real o complejo.

Prop: La característica de Euler-Poincaré $\chi(\hat{L})$ sólo depende de la clase de isometría de $\hat{L}$ (cf. [Ne], p. 212)

Prop: Para todo fibrado metrizado $\hat{L}$ se tiene

$$\mathrm{vol}(\hat{L}) = \sqrt{|d_K|} \cdot \mathfrak{N}(\hat{L})$$

donde d_K es el discriminante de K y $\mathfrak{N}$ es norma absoluta (cf. [Ne], p.213)

Obs: i) Ambas proposiciones son demostradas en detalle en [Ne].

ii) En [Sz] se define $\chi(\hat{L})$ (y una característica modificada $\chi'(\hat{L})$) que coincide con la presentada acá y en [Ne], salvo normalización.

Obs: De la segunda proposición se desprende que $\chi(\mathcal{O}_K) = -\log\sqrt{|d_K|}$

Teo (Riemann-Roch). Para todo fibrado metrizado $\hat{L}$, tenemos

$$\chi(\hat{L}) = \deg(\hat{L}) + \chi(\mathcal{O}_K)$$

Lema: Si $\deg(\hat{L})<0$, entonces $H^0(\hat{L})=\phi$

Df: En efecto, si $0\neq x\in H^0(\hat{L})$, se tiene que $|x|_\sigma\leq 1$ $\forall\sigma\in\phi_K$. Ahora bien, existe $\varphi_x:\mathcal{O}_K\longrightarrow\hat{L}$ (viendo $\hat{L}$ como ideal fraccionario), con $a\mapsto a\cdot x$. De resultados de Teoría Algebraica de Números, si $I\subseteq\mathcal{O}_K$, entonces $\mathcal{N}(I)=\#\mathcal{O}_K/I$, de donde

$$\sum_{p\neq(0)}\mathrm{ord}_p(x)\log(\mathcal{N}(p))=\log\left(\#\left(\hat{L}/\mathcal{O}_K\right)\right)$$

Luego,

$$\deg(\hat{L})=\underbrace{\log\left(\#\left(\hat{L}/x\cdot\mathcal{O}_K\right)\right)}_{\geq 0}\underbrace{-\sum_{\sigma\in\phi_K}\varepsilon_\sigma\log(|x|_\sigma)}_{\geq 0}\geq 0 \quad \times$$

$$\therefore\ H^0(\hat{L})=\phi. \ \square$$

Lema: Si $\deg(\hat{L})=0$ y $H^0(\hat{L})\neq\phi$, entonces $\hat{L}\simeq\mathcal{O}_K$.

Df: Sabemos que

$$\deg(\hat{L})=\log\left(\#\left(\hat{L}/x\cdot\mathcal{O}_K\right)\right)-\sum_{\sigma\in\phi_K}\varepsilon_\sigma\log(|x|_\sigma)=0$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{\log\left(\#\left(\hat{L}/x\cdot\mathcal{O}_K\right)\right)=0}_{①}\underbrace{=-\sum_{\sigma\in\phi_K}\varepsilon_\sigma\log(|x|_\sigma)}_{②}$$

De ① se tiene que $\hat{L}=x\cdot\mathcal{O}_K$, con lo que $\hat{L}$ es principal. De ②, $-\log(|x|_\sigma)=0$ $\forall\sigma\in\phi_K$, con lo que $|x|_\sigma=1$ $\forall\sigma\in\phi_K$. Por resultados vistos anteriormente (de las otras charlas),

$$(\mathcal{O}_K,|.|)\underset{\substack{\uparrow\\\text{isomorfo}\\\text{isométrico}}}{\simeq}\hat{L}$$

$\square$

Lema (Minkowski): Si $\deg(L) \geq \chi'(\mathcal{O}_K)$, con $\chi'(\mathcal{O}_K) = -\log\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|}\right)$ (cf. [Sz], p. 15), entonces $H^0(L) \neq \emptyset$.

Este lema es una reformulación del siguiente teorema:

Teo (Minkowski): Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ reticulado ($\Lambda \simeq \mathbb{Z}^n$), y sea $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, convexo y centrado (i.e. $x \in C \Rightarrow -x \in C$). Si $\mathrm{Vol}(C) > 2^n \mathrm{Vol}(\Lambda)$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ no nulo tal que $\lambda \in C$.

§ Referencias

[Ne] J. NEUKIRCH.- *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag (1999), pp. 208 - 213.

[Sz] L. SZPIRO.- *Degrés, intersections, hauteurs*, Asterisque 127 (1985), pp. 11 - 15.