8-Mayo-2018

R. Menares.

Teor. alg. de números: K = cuerpo de #, $\mathcal{O}_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$.

$I \subseteq K$, ideal fraccionario es un $\mathcal{O}_K$-módulo proyectivo de rango 1.

$I^{-1} = \{a \in K : aI \subseteq \mathcal{O}_K\}$

Ejlr $I = (2) \subseteq \mathcal{O}_K$, $I^{-1} = (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\mathcal{O}_K$.

Descomposición única ideales primos: $I = \prod p_i^{n_i}$, $P_i \subseteq \mathcal{O}_K$ primos, $n_i \in \mathbb{Z}$.

Defl.- $I \subseteq \mathcal{O}_K$, $N(I) = \#(\mathcal{O}_K/I)$. Cumple $N(IJ) = N(I) \cdot N(J)$.

I ideal fraccionario: $N(I) = \prod N(P_i)^{n} \in \mathbb{Q}$.

Ideales y reticulados: Incrustaciones $M_K = \{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}\}$ $\phi_K = M_K/\sim$ $\sigma \sim \overline{\sigma}$.

$\sigma \in M_K$ se dice real si $\sigma(K) \subseteq \mathbb{R}$, complejo sino.

$n = [K:\mathbb{Q}]$, r_1 = # incrust. reales, r_2 = # pares de incrust. complejos.

$n = 2r_2 + r_1$

Espacio de Minkowski $K_{\mathbb{R}} = \prod_{\sigma \in \phi_K} K_\sigma$; $K_\sigma = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \sigma \text{ es } \mathbb{R} \\ \mathbb{C} & \text{si } \sigma \text{ es compl} \end{cases}$. $K \xrightarrow{M} K_{\mathbb{R}}$, $a \mapsto (\sigma(a))_{\sigma \in \phi_K}$

Ejlr $K = \mathbb{Q}(i)$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$ $M_K = \{1, \text{Conj}\} \Rightarrow K_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$.

Ejlr $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ $M_K = \{1, a+b\sqrt{2} \mapsto a-b\sqrt{2}\}$ $K_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$M(1) = (1,1)$ $\langle 1, \sqrt{2} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

$M(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$\cup$

$\mathcal{O}_K$

Como reticulado

Discriminante: $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$-módulo libre de rango $n = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{\mathbb{Z}}$

$M_K = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$

$(\det \sigma_i(\alpha_j))^2 =: d_K$ no depende de la elección de base.

$d_K \in \mathbb{Q}$ por Galois, y $\in \overline{\mathbb{Z}}$, y así $d_K \in \mathbb{Z}$.

Un número primo $p \in \mathbb{Z}$ se dice que ramifica en K si $p\mathcal{O}_K = \prod P_i^{e_i}$ con $e_{i_0} > 1$ para algún i_0.

$\Leftrightarrow$ $p \mid d_K$ y así ramificación es finita.

Teo: (Hermite) $K \neq \mathbb{Q} \Rightarrow |d_K| > 1$.

$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. $X(\mathbb{C}) = \{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K\} = \{\mathcal{O}_K \to \mathbb{C}\}$
$= \{K \to \mathbb{C}\}$

$L|_X$ haz invertible (= line bundle).
$L(X) = \mathcal{O}_K$-módulo proyectivo de rango 1 (ie ideal fraccionario).

$L \leftrightarrow L(X)$, $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ $\quad L \otimes_{\mathcal{O}_K,\sigma} \mathbb{C} \xrightarrow[\sim]{\beta_\sigma} \mathbb{C}$
$s \otimes z \mapsto \sigma(s)\, z$

Fibrados metrizados: $\hat{L} = (L, (\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma \in M_K})$ donde para cada $\sigma \in M_K$
$\|\ \|_\sigma : L \otimes_\sigma \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ es una norma hermitiana.
Dado $x_\sigma \in L \otimes_\sigma \mathbb{C}$, $\beta_\sigma(x_\sigma) = 1$, $\|x_\sigma\|_\sigma$ determina al $\|\ \|_\sigma$.

Isometría: $\hat{L}_i = (L_i, \|\ \|_{\sigma,i})$ $i = 1,2$ son isométricos por $\hat{\varphi}$ si $\varphi : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$
isom. que respete las métricas $\forall x \in L_1$, $\forall \sigma \in M_K$, $\|\varphi(x)\|_{\sigma,2} = \|x\|_{\sigma,1}$.
obs: $L_1 = L_2 = L$, $\hat{L}_1 \simeq \hat{L}_2 \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{O}_K^*$ tal que $\forall x \in L$, $\|x\|_{1,\sigma} = |\sigma(u)|\, \|x\|_{2,\sigma}$
$\forall \sigma \in M_K$.

$\mathrm{Pic}_c(X)$ = Clases de isometrías de fibrados metrizados
$\hat{L}_1 \otimes \hat{L}_2 = (L_1 \otimes L_2, \|\cdot\|_\sigma)$ $\forall x \in L_1, \forall y \in L_2$ $\|x \otimes y\| = \|x\|_{\sigma,1} \|y\|_{\sigma,2}$.
grupo abeliano con neutro $\hat{\mathcal{O}}_K = (\mathcal{O}_K, |\cdot|_\sigma)$ $|1|_\sigma = 1$, $\forall \sigma$.
$\hat{I} \simeq \hat{\mathcal{O}}_K \Leftrightarrow \exists \alpha \in K$ tq $I = \alpha \mathcal{O}_K$ y $\forall \sigma$, $\|\alpha\|_\sigma = 1$

$\therefore$ $0 \to \underset{\substack{\text{raíces de 1} \\ \text{en } K}}{\mu_K} \to \mathcal{O}_K^* \to \mathbb{R}^{r_1+r_2} \to \mathrm{Pic}_c(X) \to Cl(K) \to 0$, etc...
$u \mapsto (\log|\sigma(u)|)_{\sigma \in \Phi_K}$

Grado: $s \in L$, $s \neq 0$ $\quad \varphi_s : \mathcal{O}_K \hookrightarrow L$
$a \mapsto a \cdot s$

$$\begin{array}{ccc} L^{-1} = \mathrm{Hom}(L, \mathcal{O}_K) & \ni & \alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K) & \ni & \alpha \circ \varphi_s \\ \| & & \\ \mathcal{O}_K & & \end{array}$$

I_s = Imagen de L^{-1} en $\mathcal{O}_K$ vía este morfismo.

R-R: ③

$\hat{L} \ : \ L \hookrightarrow K_{\mathbb{R}}$

consideramos en $K_{\mathbb{R}}$ el volumen determinado por los $\| \ \|$.

$\chi(\hat{L}) = -\log(\mathrm{vol}(L))$, $\mathrm{vol}(L)$ = vol dominio fundamental.

(vemos a L como reticulado en $K_{\mathbb{R}}$).

obs/ $\chi(\hat{\mathcal{O}}_K) = -\log\left(2^{r_2}\sqrt{|d_K|}\right)$.

$\chi'(\hat{L}) = -\log\left(2^n \mathrm{vol}(L) / 2^{r_1}\pi^{r_2}\right)$

$H^0(\hat{L}) = \{ s \in L : \|s\|_\sigma \leq 1 \ \forall \sigma \in M_K \}$ "secciones pequeñas"

RR: $\chi'(\hat{L}) = \deg(\hat{L}) + \chi'(\hat{\mathcal{O}}_K)$

Lema 1: $\deg(\hat{L}) < 0 \Rightarrow H^0(\hat{L}) = 0$

Lema 2: $\deg(\hat{L}) = 0$ y $H^0(\hat{L}) \neq 0 \Rightarrow \hat{L} \simeq \hat{\mathcal{O}}_K$.

Lema 3: $\deg(\hat{L}) \geq -\chi'(\hat{\mathcal{O}}_K) \Rightarrow H^0(\hat{L}) \neq 0$.

Teor. de Minkowski: $\Lambda \leq \mathbb{R}^n$ reticulado completo
C = convexo cerrado simétrico ($x \in C \Rightarrow -x \in C$)
$\mathrm{Vol}(C) \geq 2^n \mathrm{Vol}(\Lambda) \Rightarrow C \cap (\Lambda \setminus \{0\}) \neq 0$.

Como $H^0(\mathcal{O}_\alpha) = 0$
$\Rightarrow$ lema 3 no cumple hipot
$\deg \mathcal{O}_\alpha < -\chi'(\hat{\mathcal{O}}_K)$
$0 > \chi'(\hat{\mathcal{O}}_K)$
$\Rightarrow |d_K| > 1$.

Teo Hermite: $K \neq \mathbb{Q} \Rightarrow |d_K| > 1$.

Dem: $\chi'(\mathcal{O}_K) \leq 0$ $\left(\begin{array}{l}\text{si } \chi'(\mathcal{O}_K) > 0 \\ \Rightarrow \text{ tenemos } \hat{L} \text{ con } \deg\hat{L} < 0 \text{ y } \deg\hat{L} \geq -\chi'(\hat{\mathcal{O}}_K)\end{array}\right)$

$\chi'(\hat{\mathcal{O}}_K) = -\log\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}\sqrt{|d_K|}\right) \Rightarrow \chi'(\hat{\mathcal{O}}_K) \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}\sqrt{|d_K|} \geq 1$

reducir a $r_2 = 0$, $r_1 = n \geq 2$ $\qquad$ $r_2 \neq 0 \Rightarrow |d_K| > 1$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^n$ $\alpha \notin \log \mathcal{O}_K^*$ tal que $\sum \alpha_i = 0$ (suma coord)

$\therefore$ (i) $\deg \mathcal{O}_\alpha = 0$ ← fórmula meter. (ii) $\mathcal{O}_\alpha \not\simeq \hat{\mathcal{O}}_K$ ya que $\alpha \notin \log \mathcal{O}_K^*$ $\Rightarrow$ lema 2 dice no hay secciones.