Amplitud Aritmética

Sergio Troncoso

24 de mayo de 2018

1. Introducción

De la teoría clásica de geometría algebraica sobre curvas sabemos que un fibrado lineal $\mathcal{L}$ es amplio si y solo si $\deg(\mathcal{L}) > 0$, en el caso aritmético la definición trata de rescatar esta caracterización.

La noción clásica de amplitud aritmética pasa por la existencia de una incrustacion cerrada de X (variedad proyectiva) en un $\mathbb{P}^N$ tal que existe un $n >> 0$ con

$$\mathcal{L}^{\otimes n} = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1).$$

En el caso aritmético (hasta el momento) nuestras curvas son afines y no proyectivas, por lo tanto lo anterior no se rescata, pero si se mostrará que dado un fibrado lineal metrizado $\mathcal{L}$ con $\deg(\mathcal{L}) > 0$, existe un $n >> 0$ tal que $\mathcal{L}^{\otimes n}$ tiene secciones globales no nulas.

2. Notación

Sea K un cuerpo de números, es decir una extención finita de $\mathbb{Q}$, denotamos $\mathcal{O}_K$ como el anillo de enteros de K. llamamos $N = [K : \mathbb{Q}]$, y $N = r_1 + 2r_2$ donde $r_1 := \#\{\text{Incrustaciones reales}\}$ y $r_2 := \#\{\text{ Incrustaciones complejas}\}$.

X denota la curva algebraica $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$,
$M_K := \{\sigma : K \to \mathbb{C} | \text{Incrustaciones}\}$ y $\phi_K := \{M_K \text{ módulo conjugación compleja}\}$.

Dado un fibrado lineal metrizado $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, ||.||_\sigma)$, la norma viene dada por $||1_\sigma||_\sigma = a_\sigma > 0$, donde 1_σ es la pre-imagen de $1 \in \mathbb{C}$ vía el isomorfismo $\mathcal{L} \otimes_\sigma \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$. De manera similar denotamos $||1_\sigma||_{n,\sigma} := a_\sigma^n$ como la métrica inducida en el producto tensorial $\mathcal{L}^{\otimes n}$.

Recordemos que el conjunto de secciones globales se define como sigue:

$$\begin{aligned} H^0(X,(\mathbb{L},||.||_\sigma)) &:= \{s \in L : ||s||_\sigma \leq 1, \forall \sigma \in M_K\} \\ &= \{s \in L : sup_\sigma ||s||_\sigma \leq 1\} \end{aligned}$$

3. Teorema principal

Teorema 3.1. *Sea $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, ||.||_\sigma)$ un fibrado metrizado lineal sobre X tal que $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$ y con $\deg(\overline{\mathcal{L}}) > 0$, entonces existe un $a > 0$ y un $n >> 0$ para el cual existe un $u \in \mathcal{O}_K^*$ tal que*

$$sup_\sigma ||u||n, \sigma \leq e^{-na}(< 1).$$

Este teorema será demostrado luego de enunciar y probar los siguientes lemas.

Definición 3.2. Diremos que un fibrado metrizado lineal $(\mathcal{L}, ||1_\sigma||)$ es amplio (aritméticamente) si el ideal fraccionario de $\mathcal{L}$ denotado por L es isomorfo a $\mathcal{O}_K$ y $deg(\mathcal{L}) > 0$.

4. Lemas

Lema 4.1. *Dado un reticulado L de $\mathbb{R}^S$ contenido en el hiperplano $H = \{(x_1, \ldots, x_s) | \sum x_i = 0\}$. Dada una colección $b_1, \ldots, b_s$ de números reales tales que $\sum b_i > 0$, entonces para $n >> 0$ existe un $(x_1, \ldots, x_s)$ elemento de L no nulo talque para cada $i = 1, \ldots, s$ $x_i \leq nb_i$.*

Demostración. Sea $T_n := \{(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s | \sum x_i = 0; \forall i, x_i \leq nb_i\}$. T_n es compacto no vacío. Sea $r = \dfrac{1}{s} \sum b_i$ y tomemos $t_n = (nb_1 - nr, \ldots, nb_s - nr)$. Considerando $\mathbb{R}^s$ con la norma del supremo se tiene que

$$B_{sup}(t_n, nr) \cap H \subset T_n,$$

donde B_{sup} denota la bola con norma supremo, por lo tanto si existe un $R >> 0$ tal que para todo $x \in H$, $B_{sup}(x, R) \cap L \neq 0$, tomando n tal que $R < nr$ queda demostrado el 4.1. □

Lema 4.2. *Existe un $R >> 0$ tal que para todo $x \in H$,*

$$B_{sup}(x, R) \cap L \neq 0.$$

Demostración. Sea $(e_1, \ldots, e_{s-1})$ base del reticulado L. Dado x en H, este se escribe como $x = \sum \alpha_i e_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$. Tomando $R = (s-1)\text{Máx}(||e_i||)$, se tiene que

$$\sum \lfloor \alpha_i \rfloor e_i \in B_{sup}(x, R) \cap L.$$

□

5. Demostración del Teorema 3.1

Como $L \cong \mathcal{O}_K$ (L ideal fraccionario que representa a $\mathcal{L}$) entonces $L^n \cong \mathcal{O}_K$ y como $\deg(\mathcal{L}) > 0$, se tiene que $\deg(\mathcal{L}) = -\sum_\sigma \epsilon_\sigma log(a_\sigma) > 0$. Definiendo $b_\sigma = -(a + log(a_\sigma))$, con $a > 0$ tal que

$$\sum_\sigma \epsilon_\sigma b_\sigma = -(\sum a\epsilon_\sigma + \sum \epsilon_\sigma log(a_\sigma)) > 0,$$

cosa que se puede hacer ya que $-\sum_\sigma \epsilon_\sigma log(a_\sigma) > 0$.

Notemos que la condición que para todo $\sigma \in \phi_K$

$$||u||_{\sigma,n} = |\sigma(u)|||1_\sigma||_{\sigma,n} \leq e^{-na} < 1,$$

es equivalente a

$$log(|\sigma(u)|)^{\epsilon_\sigma} \leq \epsilon_\sigma n b_\sigma (*)$$

Así que debemos hallar un $n >> 0$ tal que exista un $u \in \mathcal{O}_K^*$ que cumpla (*).

Usando el mapeo $\phi : \mathcal{O}_K^* \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$ dado por $u \mapsto (log(|\sigma(u)|)_\sigma$, se tiene que $\phi(\mathcal{O}_K)$ esta contenido en el hiperplano $H = \{(x_1, \ldots, x_{r_1+r_2})| \sum x_i = 0\}$, luego usando que $\sum_\sigma \epsilon_\sigma b_\sigma > 0$ y el lema 4.1 se tiene que existe un $n >> 0$ tal que

$$log(|\sigma(u)|)^{\epsilon_\sigma} \leq \epsilon_\sigma n b_\sigma (*),$$

tal como queríamos.

Ejemplo 5.1. *Sea* $K = \mathbb{Q}(i)$, *entonces* $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$. *Sea* $\overline{\mathcal{L}} = (\mathbb{Z}[i], ||1|| = \frac{1}{2})$, *como* $\deg(L) = -2log(\frac{1}{2}) > 0$, *este fibrado es amplio y se verifica fácilmente que* $i \in \mathbb{Z}[i]$ *es unidad y* $||i|| = |-i|||1|| = \frac{1}{2} < 1$.