SSA SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES ALGEBRAICAS (POR GIANCARLO URZÚA)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

La idea del seminario es introducir superficies algebraicas a través del libro [2], clarificando cuando es necesario trabajar con los número complejos $\mathbb{C}$. Ésta, por ser la primera sesión del seminario, contiene muchas definiciones básicas en geometría algebraica que iremos presentando a lo largo del documento, aunque también contiene varios ejemplos concretos.

En lo que sigue, una superficie X es una variedad proyectiva irreducible no singular de dimensión 2 (máxima cadena de sub-variedades irreducibles es pt $\subset$ curva $\subset X$) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado. En otras palabras

$$X = \{x = [x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : F_1(x) = ... = F_l(x) = 0\},$$

(para algún n) donde $F_i \in \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ son polinomios homogéneos, y dim $X = 2$. La no singularidad de X impone restricciones en los F_i (ver más abajo). El ideal (homogéneo) de X es $I_X = (F_1, \ldots, F_l)$; es ideal primo en $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ (ya que X es irreducible). El cuerpo de funciones racionales de X se define como el cuerpo de fracciones de $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]/I_X$ y se denota por $\mathbb{K}(X)$.

Observación 0.1. En general, la dimension de una variedad irreducible X se puede definir como el grado de transcendencia de $\mathbb{K}(X)$ sobre $\mathbb{K}$. Cuando la variedad no es irreducible, se define como la mayor dimensión de las componentes irreducibles de X. Otra manera de definirla es como el mayor $n \in \mathbb{N}$ para el cual es posible encontrar una cadena $\emptyset \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq ... \subsetneq X_n$ de sub-variedades irreducibles en X, como fue hecho en nuestra situación.

Ejemplo 0.1. La variedad $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ es una superficie algebraica (no proyectiva). Uno identifica $\mathbb{A}^2_K = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, y le llamamos plano afín. Una superficie proyectiva de gran importancia es el famoso plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{x_0,x_1,x_2}$. Este se construye a partir de $\mathbb{K}^3 \setminus (0,0,0)$, identificando todos los punto de cada linea que pasa por $(0,0,0)$: $(a,b,c) = (ka,kb,kc)$ para todo $k \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, y su clase (punto) en $\mathbb{P}^2$ es $[a,b,c]$.

Ejemplo 0.2. En $\mathbb{P}^3$ tenemos las hipersuperficies de grado d, es decir

$$X_d = \{x \in \mathbb{P}^3 \colon F_d(x) = 0\},$$

Date: 25 de agosto de 2011.

donde F_d es un polinomio irreducible homogeneo de grado d. Será no singular si no todas sus derivadas parciales son cero en un punto de X_d. Por ejemplo, las muy simétricas superficies de Fermat ($x_0^d + x_1^d + x_2^d + x_3^d = 0$) son no singulares.

Ejemplo 0.3. Generalizando el ejemplo anterior, tenemos las <u>intersecciones completas</u>

$$X_{d_1,\ldots,d_r} = \{x \in \mathbb{P}^{r+2} \colon F_1(x) = \ldots = F_r(x) = 0\}$$

donde el grado de F_i es d_i. Por supuesto no toda tal variedad es una superficie irreducible y no singular, para eso usaremos el Teorema de Bertini [3, p.179]: " Si X es una variedad irreducible no singular proyectiva en $\mathbb{P}^n$ de dimension > 1, entonces existe una cantidad "densa"de hiperplanos

$$H = (a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0)$$

tal que $X \cap H$ es una variedad no singular e irreducible."

A manera de introducir más geometría, consideremos la <u>inmersión de Veronese</u> de grado d

$$\nu_d \colon \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$$

dada por $\nu_d[x_0, \ldots, x_n] = [\ldots, m(x_0, \ldots, x_n), \ldots]$ donde $m(x_0, \ldots, x_n)$ recorre todos los posibles monomios homogéneos de grado d (con el orden lexicográfico en los índices y los exponentes, por ejemplo $x_1 < x_1^2 < x_2$). La imagen de ν_d es una variedad proyectiva la cual es definida por un conjunto finito de cuádricas (encontrar cuáles!)(Si pensamos que $v_{i_0i_1\ldots i_n}$ es la coordenada asociada al monomio $x_0^{i_0}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ se puede verificar que $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ es justamente la intersección de cuádricas dadas por

$$v_{i_0i_1\ldots i_n}v_{j_0j_1\ldots j_n} = v_{k_0k_1\ldots k_n}v_{l_0l_1\ldots l_n},$$

tal que $i_p + j_p = k_p + l_p$, con $p \in \{0, \ldots, n\}$).

Así, vemos $\mathbb{P}^n$ como subvariedad de $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$ y $\nu_d(\mathbb{P}^n) \cap H$ (H como arriba en $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$) es $X_d = (F_d = 0)$ en $\mathbb{P}^n$. Por Bertini, tenemos muchos ejemplos 0.2. Más aún, aplicamos Bertini varias veces para probar la existencia de superficies irreducibles no singulares $X_{d_1,\ldots,d_r}$. Notar que toda sub-variedad de $\mathbb{P}^n$ puede ser representada por una de $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ a pesar de que las restricciones de polinomios de grado k en $\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$ restringe a un polinomio de grado dk en $\mathbb{P}^n$. El truco es que una variedad $Y = (F_a = 0)$ en $\mathbb{P}^n$ definida por un polinomio de grado a, está también descrita por el sistema

$$x_0F_a(x) = x_1F_a(x) = \ldots = x_nF_a(x) = 0$$

y así podemos aumentar el grado a un múltiplo de d.

No toda superficie es una intersección completa. Por ejemplo, sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el Teorema de Lefschetz de las secciones hiperplanas [1, p.59] nos dice que todas las $X_{d_1,\ldots,d_r}$ son simplemente conexas. Por otro lado, veremos al final de esta nota que para cada par de curvas proyectivas C_1, C_2, tenemos que $C_1 \times C_2$ es una superficie proyectiva, y así en general no simplemente conexa.

Haces y cohomología de haces serán relevantes para lo que sigue en el seminario. Se recomienda leer el capítulo correspondiente del "Chapters on algebraic surfaces"de Miles Ried. Para cohomología, se recomienda leer acerca de Čech cohomology en [3].

Consideramos una superficie X como espacio topológico con la topología Zariski (cerrados son sub-variedades algebraicas de X). Localmente, X es de la forma

$$\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]/(f_1, \ldots, f_l) = U_i \cap X = A_i$$

donde $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$ con $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. La superficie X es no singular en $x \in X$ si y sólo si el rango de la matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ es exactamente $n-2$. Las correspondientes formas lineales definen el espacio tangente T_x. En general, el espacio tangente (de Zariski) en x se define como el dual de m_x/m_x^2, donde m_x es el ideal maximal que define a x.

Definimos el haz estructural $\mathcal{O}_X$ como

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f \colon U \to \mathbb{A}^1 \text{ tal que } \ f|_{U\cap V_i} = g|_{U\cap A_i} \text{ para algúna } g \in A_i\}$$

para todo abierto U de X. Como X es irreducible y proyectiva, $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}$.

Observación 0.2. Para cualquier haz $\mathcal{F}$ sobre una variedad proyectiva X, usaremos la notación $\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$ = secciones de $\mathcal{F}$ sobre X. Para un haz (coherente) de $\mathcal{O}_X$-modulos $\mathcal{F}$, $H^i(X, \mathcal{F})$ denota el i-ésimo grupo de cohomología, el cual es un espacio vectorial de dimensión finita $h^i(X, \mathcal{F})$. La característica de Euler de $\mathcal{F}$ es

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}).$$

Otro personaje importante es el haz de diferenciales Ω^1_X, el cual localmente es $\Omega^1_X(V_i) = \Omega^1_{A_i|_{\mathbb{K}}}$, así un A_i-módulo. El haz de diferenciales Ω^1_X es un $\mathcal{O}_X$-módulo. Recordamos que $\Omega^1_{A_i|_{\mathbb{K}}}$ es el módulo universal proveniente de las derivaciones. Una derivación es una función $d \colon A_i \to M$, donde M es un A_i-módulo, tal que (1) es $d(f+g) = d(f) + d(g)$, (2) $d(fg) = f(dg) + g(df)$ y (3) $d(k) = 0$ para $k \in \mathbb{K}$ [3, p.172].

Es un teorema que para una variedad irreducible X, el haz Ω^1_X es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango $\dim(X)$ si y sólo si X es no singular.

Las operaciones algebraicas para módulos se aplican a los haces (e.g. $\oplus$, $\otimes$, $\wedge$). Definimos $\Omega^2_X = \Omega^1_X \wedge \Omega^1_X$. Si X es una superficie no singular, entonces Ω^2_X es localmente libre de rango 1.

Ejemplo 0.4. En $\mathbb{P}^2$ es fácil verificar localmente que no hay secciones globales para Ω^1_X y Ω^2_X. El punto es que dada una diferecial local en U_i, las funciones que pegan el anillo de partida U_i con el de llegada U_j fuerzan la existencia de polos (i.e. no son definidos a lo largo de curvas).

La clase canónica K_X está definida por todas las curvas que aparecen al mover Ω^2_X localmente, eliminando la multiplicación por funciones racionales. De esta forma, la clase canónica estará representada por un divisor (suma finita de curvas irreducibles sobre $\mathbb{Z}$) K_X. En la próxima sesión hablaremos de divisores e intersección, y tendremos el número (bien definido) $K_X^2 = K_X.K_X$. Este es un número fundamental de X, informalmente se calcula intersectando dos curvas en la clase canónica. Por ejemplo, es simple verificar que $K^2_{\mathbb{P}^2} = 9$.

Para variedades, tendremos dos clases de aplicaciones:

i. Aplicaciones regulares $F\colon X \subseteq \mathbb{P}^n \to Y \subseteq \mathbb{P}^m$ tal que $F(x) = [F_0(x), \ldots, F_m(x)]$ con F_i homogéneos del mismo grado. Lo que importa aquí es que funciones regulares h en $\mathcal{O}_Y$ den funciones regulares $h(F)$ en $\mathcal{O}_X$.

ii. Aplicaciones racionales $F\colon X \subseteq \mathbb{P}^n \dashrightarrow Y \subseteq \mathbb{P}^m$ tal que $F(x) = [F_0(x), \ldots, F_m(x)]$ con F_i homogéneos del mismo grado, pero los F_i pueden ser simultaneamente cero en alguna subvariedad de X. Así, existe un abierto (Zariski!) U tal que $F|_U$ es regular. De hecho, si X es irreducible y F es una aplicación racional tal que es regular en un abierto U, entonces F está determinada por $F|_U$.

Para los dos tipos de aplicaciones, los isomorfismos serán llamados biregular y biracional. La clasificación biregular es análoga con el estudio de espacios modulares de superficies algebraicas. Representa la meta suprema. Entender las clases biracionales es parte de la meta de este seminario: se puede decir precisamente cómo se relacionan dos variedades biracionales, y podemos elegir un modelo destacado. Este modelo será único cuando la clase biracional no contenga superficies de la forma $\mathbb{P}^1 \times C$, con C una curva proyectiva.

Ejemplo 0.5. La aplicación $F\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ dada por $F(x_0, x_1, x_2) = [x_0, x_1]$ es racional. La restricción $F|_X$ a la cónica $X = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0)$ es regular. La aplicación $G\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ $F(x_0, x_1, x_2) = [x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$ es biracional, se llama la transformación de Cremona. No está definida en tres puntos.

Algunos invariantes numéricos son

$$q(X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) \quad \text{y} \quad p_g(X) = h^2(X, \mathcal{O}_X).$$

El primero se llama irregularidad y el segundo género geométrico. A partir de estos, se calcula la característica de Euler de X

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) + h^2(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X).$$

Sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y usando la topología inducida de $\mathbb{C}^2$, tenemos los números de Betti $b_i(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q})$. La dualidad de Poincaré implica que los unicos número a calcular son $b_1(X) = b_3(X)$ y $b_2(X)$ ($b_0 = b_4 = 1$). La descomposición de Hodge nos da $q(X) = h^0(X, \Omega^1_X)$ y $p_g(X) = h^0(X, \Omega^2_X)$, y

$$b_1(X) = 2q(X) \qquad b_2(X) = 2p_g(X) + h^{1,1} = 2p_g(X) + h^1(\Omega^1_X).$$

Aquí también se está usando para las comparaciones entre haces en diferentes topologías el GAGA de Serre. Por último, la característica topológica de Euler es

$$\chi_{\mathrm{top}}(X) = 2 - 2b_1(X) + b_2(X).$$

Ejemplo 0.6. Para $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ya tenemos $K_X^2 = 9$, y por las identificaciones para q y p_g vemos facilmente que $q(X) = p_g(X) = 0$. Es decir, los "géneros"de $\mathbb{P}^2$ se anulan. Uno sabe que para curvas: $g(C) = 0$ es equivalente a $C = \mathbb{P}^1$. Enriques y Castelnuovo (más de 100 a$\tilde{n}$os atrás) respondieron negativamente a la generalización natural, y esto abrió un mar de nuevas superficies algebraicas "exóticas" cuya investigación está activa estos días. Ver por ejemplo [1, p.299], se les llama las superficies $q = p_g = 0$. Volviendo al ejemplo, también tenemos $\chi_{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = 3$ ya que $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup pt$. Notar la igualdad $12\chi = K^2 + \chi_{\mathrm{top}}$.

Ejemplo 0.7. Consideremos el producto de curvas proyectivas (no singular e irreducibles) $X = C_1 \times C_2$. Veremos que es una superficie proyectiva y calcularemos invariantes númericos. Primero recordamos le inmersión de Segre

$$s\colon \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}$$

donde $s([x_0, \ldots, x_n], [y_0, \ldots, y_m]) = [\ldots, x_i y_j, \ldots]$. Se puede demostrar que la imagen $s(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ es precisamente la variedad definida por

$$z_{i,j} z_{k,l} = z_{i,l} z_{k,j}$$

para todos los posibles índices (le damos un orden primero, como por ejemplo el orden lexicográfico). Las sub-variedades de la imagen están definidas por polinomios F tal que en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tienen bi-grado homogéneo $(\text{grado}F, \text{grado}F)$. Pero las variedades de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ consisten de todos los polinomios bi-homogéneos de grado (a, b). El truco denuevo es multiplicar por coordenadas (como lo hicimos para Veronese) hasta llegar al grado (k, k).

En nuestra situación, C_1 está definida por polinomios $F_i(x) = 0$ de grado d_i. Entonces, consideremos en vez $y_0^{d_i} F_i(x) = \ldots = y_m^{d_i} F_i(x) = 0$, etc. Luego es claro que $X = C_1 \times C_2$ es una superfcie proyectiva.

Si $\pi_i\colon X \to C_i$ es la proyección, entonces

$$\Omega^1_X = \pi_1^*(\Omega^1_{C_1}) \oplus \pi_2^*(\Omega^1_{C_2}) \quad \text{y} \quad \Omega^2_X = \pi_1^*(\Omega^1_{C_1}) \otimes \pi_2^*(\Omega^1_{C_2}).$$

Ya que grado $\Omega^1_{C_i} = 2g(C_i) - 2$, donde $g(C_i) = h^0(C_i, \Omega^1_{C_i}) =$ género de C_i, tenemos $K_X^2 = 8(g(C_1) - 1)(g(C_2) - 1)$. Vemos también que $q(X) = g(C_1) + g(C_2)$ y $p_g(X) = g(C_1)g(C_2)$. Sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tenemos $\chi_{\mathrm{top}}(X) = \chi_{\mathrm{top}}(C_1)\chi_{\mathrm{top}}(C_2) = 4(g(C_1)-1)(g(C_2)-1)$. Nuevamente verificamos $12\chi = K^2 + \chi_{\mathrm{top}}$. Ésta identidad se verificará siempre, es la fórmula de Noether.

Referencias

1. W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., second edition, vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
2. A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
3. R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.