SSA SESIÓN 10: SUPERFICIES MÍNIMAS Y CRITERIO DE CASTELNUOVO II (POR RICARDO MENARES)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANÍBAL VELOZO

Esta es la continuación de la sesión anterior donde empezamos la demostración del teorema de Castelnuovo, ahora terminaremos tal demostración.

Teorema 0.1. *(Castelnuovo) Sea S una superficie proyectiva suave y $E \subset S$ una curva tal que*

i) $E \cong \mathbb{P}^1$
ii) $E^2 = -1$

Entonces existe $\varphi : S \to S'$ con S' una superficie suave tal que φ es el blow up en $p \in S'$ con $\varphi(E) = p$.

Vamos a probar el Criterio de Castelnuovo para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

<u>Recuerdo</u>:

Podemos asumir que H es una sección hiperplana de $S \subset \mathbb{P}^n$ (el divisor que se obtiene de la intersección con un hiperplano) tal que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$. Sea $k = H.E$. Para cada $i \in \{1, .., k\}$ se tienen las funciones restricción $r_i : H^0(S, \mathcal{O}_S(H + iE)) \to H^0(E, \mathcal{O}_E(k - i))$, que sabemos son sobreyectivas (por la sesión anterior). Ahora elegimos:

i) $s \in \mathcal{O}_S(E)$ tal que $(s)_0 = E$ (sus divisores del cero).
ii) $\{s_0, ..., s_n\}$ una base de $H^0(S, \mathcal{O}_S(H))$
iii) Para cada $i \in \{1, ..., k\}$ escojo $a_{i,0}, ..., a_{i,k-i}$ que al aplicar r_i definen una base de $H^0(E, \mathcal{O}_E(k-i))$. En particular para $k = i$ tengo que $r_k(a_{k,0}) \in H^0(E, \mathcal{O}_E)$ osea la función es constante.

Sea $H' = H + kE$, entonces

$$\{s^k s_0, ..., s^k s_n, s^{k-1} a_{1,0}, ..., s^{k-1} a_{1,k-1}, ..., a_{k,0}\}$$

define una base para $H^0(S, \mathcal{O}_S(H'))$. Definimos la aplicación $\Phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ donde N es la cantidad de elementos de la base menos uno y las funciones coordenada son los elementos de la base. Esta aplicación es de hecho regular ya que en E no se anula la última coordenada $a_{k,0}$ y fuera de E no se pueden anular simultaneamente todos los s_i. Observemos que $\Phi(E) = [0 : 0 : ... : 0 : 1] = p \in \mathbb{P}^N$. Consideraremos $S' = \Phi(S)$ y el plan ahora es probar que esta superficie es suave y el blow up en p es precisamente S.

Date: 13 de noviembre de 2011.

Sea $\mathcal{U} := \{a_{k,0} \neq 0\}$ (una vecindad de E). Consideremos $x = \dfrac{a_{k-1,0}}{a_{k,0}}$, $y = \dfrac{a_{k-1,1}}{a_{k,0}}$, vemos que la imagen de $x_{|E}, y_{|E}$ definen un base de $H^0(E, \mathcal{O}_E(1))$. Podemos suponer que x, y no tienen ceros comunes en $\mathcal{U}$ (o si no reducimos esta vecindad aunque la seguiremos llamandola $\mathcal{U}$ por comodidad).

Consideramos $\tilde{h} : \mathcal{U} \to \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ definida por $\tilde{h}(q) = ((s(x(q)), s(y(q))), [x(q) : y(q)])$. Anotaremos por $\hat{A}^2$ el blow up de $\mathbb{A}^2$ en $(0,0)$. Como $\hat{A}^2$ esta dado por la ecuación $uV - vU = 0$ en $\mathbb{A}^2_{u,v} \times \mathbb{P}^1_{U,V}$ se verifica facilmente que $\tilde{h}(\mathcal{U}) \subset \hat{A}^2$, anotamos $h : \mathcal{U} \to \hat{A}^2$ a esta restricción del codominio. Para concluir la demostración basta probar que p es un punto suave de S'. Para esto necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 1: $h_{|E} \cong$ *divisor excepcional de* $\hat{A}^2$

Directo de la elección de s, x, y (el divisor excepcional de $\hat{\mathbb{A}}^2$ esta dado por los puntos de la forma $((0,0), [U, V])$, basta ver que s se anula en E y x, y recorren este $\mathbb{P}^1$ por ser base de $H^0(E, \mathcal{O}_E(1))$).

Lema 2: $\forall q \in E$, $h_{|E}$ *es étale en una vecindad de* q

(i.e. h^* *envía una carta local en* $h(q)$ *en una carta local en* q*).*

Podemos suponer que $x(q) = 0, y(q) = 1$. Sea $w := h(q) = ((0,0), [0 : 1])$. Parámetros locales entorno a w son $\{v, U/V\}$, por las ecuaciones que definen h tenemos $h^*(v) = sy$, $h^*(U/V) = x/y$ y como $\{sy, x/y\}$ es un sistema de paámetros entorno a q se tiene que h es étale.

Lema 3: *Existe una vecindad* V *del divisor excepcional de* $\hat{A}^2$ *tal que* $h : \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \to V$ *es un isomorfismo.*

En este lema ocuparemos fuertemente que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, bajo este supuesto basta probar que h es homeomorfismo. Tenemos un <u>Hecho general</u>:

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios Hausdorff y $K \subset X$ compacto, si se cumplen las condiciones:

i) $f_{|K}$ es un homeomorfismo con su imagen.

ii) $\forall k \in K$, f es un homeomorfismo local.

Entonces existe un abierto W con $K \subset W$ tal que $f_{|W}$ es un homeomorfismo con su $f(W)$.

De este hecho general se desprende el Lema 3 ocupando que E es compacto con la topología heredada de $\mathbb{C}$. Tomamos π es la proyección a $\hat{\mathbb{A}}^2$ a $\mathbb{A}^2$. Ahora para terminar la demostración del teorema consideremos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U}' \arrow[r, "h", "\sim"'] \arrow[d, "\Phi"'] & V \subset \hat{\mathbb{A}}^2 \arrow[d, "\pi"] \\
p \in \Phi(\mathcal{U}') \arrow[r, "\tilde{h}"'] & \pi(V) \subset \mathbb{A}^2
\end{tikzcd}
$$

Observamos que $\hat{h}$ es regular fuera de p (Φ^{-1} lo es) y la regularidad en p es directo del lema 1. Ahora basta probar que esta función es en efecto un isomorfismo.

Basta verificar que α es regular en el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dashed, "\Phi\circ h^{-1}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \Phi(\mathcal{U}') \\
& \pi(V) \subset \mathbb{A}^2 \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

Fuera de $(0,0)$ se puede definir α. También en $(0,0)$. Para ver esto, reducir la imagen $\Phi(\mathcal{U}')$ a un afín, así α está dada por $\alpha(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$. Cada $f_i(x)$ es una función racional en $\mathbb{A}^2$ que sólo podría no estar definida en $(0,0)$. Pero como $\mathbb{A}^2$ es suave en $(0,0)$, sabemos que toda f_i sí está definida en $(0,0)$. Así α es una aplicación regular, y es precisamente la inversa de $\tilde{h}$. Se sigue de este isomorfismo que $p \in S'$ es un punto no singular. Con esto se concluye la demostración del teorema de Castelnuovo y obtuvimos la existencia de la superficie suave S'.