SSA SESIÓN 11: SUPERFICIES REGLADAS (POR ROBERT AUFFARTH)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

Comenzaremos la sesión con un breve recordatorio sobre la equivalencia birracional entre curvas, y cómo esta equivalencia nos lleva naturalmente a varias preguntas para superficies, guiándonos eventualmente a la definición de una *superficie reglada*. Estaremos trabajando siempre sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{K}$.

Dada una curva C, sabemos que existe una curva normal C' y un morfismo birracional finito $f : C' \to C$ (normalización). Como las variedades normales son suaves en codimensión 1 (es decir, el conjunto cerrado de los puntos singulares de la variedad tiene codimensión mayor o igual a 2), obtenemos que la normalización de C es suave. En particular, toda curva es birracional a una curva suave.

Además, si $f : X \to Y$ es una aplicación racional entre dos variedades suaves, el conjunto de puntos donde f no es regular tiene codimensión mayor o igual a 2. En particular, si dos curvas suaves son birracionales, entonces son isomorfos.

Por lo tanto, toda curva es birracional a una única curva no singular; tal curva se llama un *modelo*. Así, el problema de la clasificación birracional de curvas se convierte en un problema de clasificación de curvas módulo isomorfismo.

Tenemos un conocimiento bastante completo acerca de la clasificación de curvas suaves. De hecho, las siguientes categorías son equivalentes:

1. Curvas proyectivas no singulares con morfismos dominantes (morfismos con imagen densa)
2. Curvas cuasiproyectivas con aplicaciones racionales dominantes
3. Cuerpos de funciones de grado de transcendencia 1 sobre $\mathbb{K}$ con $\mathbb{K}$-homomorfismos.

Además, una curva con cuerpo de funciones K se puede asociar al conjunto $\{R \subseteq K : R$ es un anillo de valuación discreta de $K/\mathbb{K}\}$.

Para dimensión 2 (superficies algebraicas), podemos hacernos las mismas preguntas. ¿Siempre existe un modelo proyectivo suave para una clase birracional? ¿En el caso afirmativo, tal modelo es único?

Para la primera pregunta, se sabe que sí existe siempre un modelo proyectivo suave. Sin embargo, para superficies tal modelo no es único.

Por ejemplo, consideremos las superficies $\mathbb{P}^2$ y $X_2 \subseteq \mathbb{P}^3$, donde $X_2 = \{F = 0\}$ para F un polinomio homogéneo irreducible de grado 2.

Proposición 0.1. *$\mathbb{P}^2$ y X_2 son birracionales y suaves, pero no isomorfos.*

Date: 22 de noviembre de 2011.

Demostración Via la proyección estereográfica se ve que X_2 es racional. No son isomorfos, ya que X_2 contiene dos rectas que no se intersectan, y por otro lado dos curvas cualesquiera en $\mathbb{P}^2$ se intersectan. $\square$

La pregunta surge entonces: ¿En el caso de superficies, cómo podemos encontrar algún modelo distinguido?

Definición 0.1. Una superficie no singular X' *domina a* X si existe un morfismo birracional $f : X' \to X$. Una variedad X es un modelo *minimal* si solamente domina a variedades que son isomorfas a sí misma.

Para nosotros, los modelos minimales serán los modelos distinguidos.

Teorema 0.1. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo birracional. Para $x \in X$, supongamos que $y = f(x)$ es no singular y que f^{-1} no es regular en y. Entonces existe una subvariedad $Z \subseteq X$ con $x \in Z$ tal que codim $Z = 1$ pero codim $f(Z) \geq 2$.*

En este teorema, la subvariedad Z se llama una *subvariedad excepcional para f*. Notamos de inmediato que este teorema generaliza lo que ocurre en la explosión de un punto.

Vemos entonces que si X es una superficie no singular, es un modelo minimal si y solamente si no contiene subvariedades excepcionales.

El Teorema de Castelnuovo implica que un modelo minimal siempre existe en el caso de superficies, y se construye al contraer cada curva C con $C^2 = -1$ a un punto.

Otra pregunta natural surge: ¿Existirá un único modelo minimal para cada clase birracional? Otra vez la respuesta es no:

Proposición 0.2. $\mathbb{P}^2$ *y* X_2 *son modelos minimales.*

Sin embargo, resulta ser que en la "mayoría"de los casos, sí ocurre que los modelos minimales son únicos. Enriques probó que si X no es una *superficie reglada*, entonces su clase birracional contiene un solo modelo minimal.

El resto de la sesión nos enfocaremos entonces en estudiar las superficies regladas; trabajaremos sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y todas las superficies serán lisas.

Definición 0.2. Una superficie es *reglada* si es birracional con $C \times \mathbb{P}^1$ para alguna curva suave C. Si $C = \mathbb{P}^1$, entonces decimos que X es *racional*.

Podemos ver que si X es una superficie reglada birracional con $C \times \mathbb{P}^1$, entonces C es única: si D es una curva tal que $C \times \mathbb{P}^1$ es birracional con $D \times \mathbb{P}^1$ (digamos $f : C \times \mathbb{P}^1 \to D \times \mathbb{P}^1$ es birracional), entonces existen varias posibilidades. Una es que $f(\mathbb{P}^1) \subseteq f(C \times \mathbb{P}^1)$ no sea una fibra de la proyección a D, y a través de esta proyección, obtenemos un morfismo sobreyectivo $\mathbb{P}^1 \to D$, y luego $D \simeq \mathbb{P}^1$. Usando ahora f^{-1} es fácil ver que C también sería isomorfo a $\mathbb{P}^1$. En el otro caso, supongamos que C no es isomorfo a $\mathbb{P}^1$ y supongamos que $f(\mathbb{P}^1)$ sí es una fibra; entonces $f(C)$ no es una fibra. Escojamos una copia de $\mathbb{P}^1$ y una copia de C en $C \times \mathbb{P}^1$ tal que f es un morfismo cuando es restringido a C y $\mathbb{P}^1$ (o sea está definido en todos los puntos de estas curvas; tales curvas existen ya que los puntos donde f no está definido son finitos). Notamos que $C.\mathbb{P}^1 = 1$, y luego $f(C).f(\mathbb{P}^1) = 1$. Como $f(\mathbb{P}^1)$ es una fibra de la proyección, entonces todas las fibras intersectan $f(C)$ en un punto, lo cual implica que $f(C)$ es horizontal. Así obtenemos un isomorfismo de C a D.

Antes de comenzar a ver algunas propiedades de las superficies regladas, veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 0.1. $C \times \mathbb{P}^1$ es trivialmente reglada para cualquier curva suave C.

Ejemplo 0.2. $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ son regladas; por lo mismo toda cónica en $\mathbb{P}^3$ es también una superficie reglada.

Ejemplo 0.3. Consideremos la superficie $\overline{X}$ que es la clausura algebraica de $X = \{x^3 + y^3 + z^3 - 1\} \subset \mathbb{A}^3$. Vemos que contiene las rectas $L_1 = \{x + y = 0, z = 1\}$ y $L_2 = \{x + \epsilon y = 0, z = \epsilon\}$. Escogemos un plano $E \subseteq \mathbb{A}^3$ que no contiene estas rectas; se ve que para todo $x \in X \backslash (L_1 \cup L_2)$, existe una única recta L_x que pasa por x y que intersecta L_1 y L_2. Escribimos $f(x) := L \cap E$; f es una aplicación birracional de X con $E \simeq \mathbb{A}^2$. Luego $\overline{X}$ es birracional con $\mathbb{P}^2$.

Ejemplo 0.4. Si $C \subseteq \mathbb{P}^n$ es una curva contenida en un hiperplano H, escogemos un punto $p \notin H$. Sea X' la unión de todas las rectas que pasan por puntos de C y por X; esta variedad se llama el *cono* de C. Si explotamos X' en p (para que quede lisa la superficie), obtenemos una superficie reglada. Las superficies de Hirzebruch son de esta forma.

Ejemplo 0.5. Recordemos la definición de fibrado vectorial: Un *fibrado vectorial de rango* r de una variedad C es una variedad E junto a un morfismo $\pi : E \to C$ tal que: existe un cubrimiento (finito) por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de C e isomorfismos $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{A}^r$ tales que $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r$ es de la forma $(x, v) \mapsto (x, t_{ij}(x)(v))$ para morfismos $t_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ para todo i, j.

La *proyectivización* del fibrado E es la proyectivización de todas las fibras de π; así, en vez de isomorfismos a $U_i \times \mathbb{A}^r$, obtenemos isomorfismos a $U_i \times \mathbb{P}^r$, y también los morfismos de transición t_{ij} son de la forma $t_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{PGL}(r, \mathbb{K})$ (y se obtienen a partir de los t_{ij} originales proyectando sobre $\mathrm{PGL}(r, \mathbb{K})$).

Consideremos ahora C una curva y E un fibrado vectorial de rango 2 sobre C. Entonces E es una superficie (localmente es isomorfo a $U_i \times \mathbb{P}^1$), y además se ve que es reglada.

Notamos además que el ejemplo anterior es un caso particular de un fibrado vectorial de rango 2 sobre una curva (se llama el fibrado trivial).

Para entender bien cuáles son los modelos minimales de las superficies regladas, introducimos una noción auxiliar:

Definición 0.3. Sea C una curva suave. Una superficie *geométricamente reglada sobre* C es una superficie X junto a un morfismo $p : S \to C$ cuyas fibras son isomorfas a $\mathbb{P}^1$.

Por ejemplo, los dos ejemplos dados anteriormente son superficies geométricamente regladas.

El próximo teorema nos dice que una superficie que es geométricamente reglada es también reglada:

Teorema 0.2. *(Noether-Enriques) Sea S una superficie, p un morfismo de S a una curva suave C. Suponga que existe $x \in C$ tal que $p^{-1}(x)$ es isomorfo a $\mathbb{P}^1$. Entonces existe un abierto (Zariski) $U \subset C$ que contiene a x y un isomorfismo de $p^{-1}(U)$ a $U \times \mathbb{P}^1$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, S es reglada.

Vamos a ver que las superficies geométricamente regladas van a tomar un rol fundamental en la pregunta que hicimos al principio: ¿Cuáles son los modelos minimales para las superficies regladas? Además, no es coincidencia de que los ejemplos dados anteriormente sean todos ejemplos de fibrados vectoriales de rango 2; la siguiente proposición clarifica esto:

Proposición 0.3. *Toda superficie geométricamente reglada sobre una curva suave C es C-isomorfa a $\mathbb{P}_C(E)$ para algún fibrado vectorial E de rango 2 sobre C. Además, los fibrados $\mathbb{P}_C(E)$ y $\mathbb{P}_C(E')$ son C-isomorfos si y solamente si existe un fibrado en líneas L en C tal que $E' \simeq E \otimes L$.*

Demostración La idea de la demostración es que tenemos una secuencia exacta

$$1 \to \mathcal{O}_C^* \to \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_C) \to \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_C) \to 1,$$

y luego obtenemos una secuencia exacta en cohomología:

$$H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \to H^1(C, \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_C)) \to H^1(C, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_C)) \to H^2(C, \mathcal{O}_C^*).$$

Esta secuencia se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathrm{Pic}(C) \to \{\text{fibrados vectoriales de rango 2}\} \to \{\text{sup. geo. regladas}\} \to H^2(C, \mathcal{O}_C^*) = 0.$$

De esta secuencia, vemos que dos fibrados vectoriales de rango 2 dan lugar a la misma superficie geométricamente reglada si y solamente si difieren por un elemento de

$\mathrm{Pic}(C)$; es decir, por un fibrado en líneas. Además, toda superficie geométricamente reglada proviene de un fibrado vectorial de rango 2. $\square$

Hemos obtenido una caracterización de las superficies geométricamente regladas; ahora ¿qué más podemos decir acerca de ellas?

Lema 0.1. *Sea S una superficie minimal, C una curva suave y $p : S \to C$ un morfismo con fibras genéricas isomorfas a $\mathbb{P}^1$. Entonces S es geométricamente reglada por p.*

Demostración Sea F una fibra de p; observamos que $F^2 = 0$. Además, si restringimos p a una curva D cualquiera en S que no es una fibra, obtenemos que $p(D) = C$ y $p^*(x).D = \deg p|_D$, y entonces $p^*(x).D$ es independiente de x. Por lo tanto, como $F.K = -2$ para la "mayoría"de las fibras $F = p^*(y)$, obtenemos que $F.K = -2$ para toda fibra.

Supongamos primero que F es irreducible. Si $F = \Gamma$ para alguna curva Γ, entonces

$$-2 = K.F = K.\Gamma = 2g(\Gamma) - 2 - \Gamma^2 = 2g(\Gamma) - 2 < 0$$

(recordemos que si $C \subset S$ es una curva en una superficie, entonces $g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K)$). Por lo tanto, $g(\Gamma) = 0$. Se tiene que

$$g(\Gamma) = p_a(\Gamma) - \sum_i \frac{m_i(m_i - 1)}{2}$$

para ciertos enteros positivos m_i (que son estrictamente positivos si Γ es singular). Sin embargo, notamos que $g(\Gamma) = 0$ y luego $m_i = 0$ para todo i, lo cual significa que Γ es no singular. Luego $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1$, y se prueba el lema.

Si $F = \sum_i n_i \Gamma_i$ es una fibra reducible de p, entonces $\Gamma_i^2 < 0$ para todo i. Tenemos por la fórmula del género que

$$\Gamma_i.K = 2g(\Gamma_i) - 2 - \Gamma_i^2 \geq -1,$$

y hay igualdad si y sólo si $\Gamma_i^2 = -1$ y $g(\Gamma_i) = 0$. Este caso es posible si y solamente si Γ_i es excepcional, una contradicción con las hipótesis. Por lo tanto, $K.\Gamma_i \geq 0$ para todo i, y luego $-2 = K.F \geq 0$, una contradicción. $\square$

El siguiente teorema contesta (en parte) la pregunta inicial que hicimos.

Teorema 0.3. *Sea C una curva irracional. Entonces los modelos minimales de $C \times \mathbb{P}^1$ son exactamente las superficies geométricamente regladas sobre C; es decir, los fibrados vectoriales proyectivos de rango 2.*

Este teorema no se aplica a las superficies racionales; este caso lo mencionaremos ahora, y se verá con más detalle en otra sesión.

Recordemos la definición del *haz torcido de Serre*: Consideremos $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{A}_i^n = \{x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^n$. Definimos un fibrado en líneas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ usando el fibrado trivial sobre los abiertos $\mathbb{A}_i^n$ con funciones de transición $t_{ij} : \mathbb{A}_i^n \cap \mathbb{A}_j^n \to \mathbb{C}^*$ tal que $[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto x_j/x_i$. Tenemos que el anillo de las secciones globales regulares $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ consiste de (es isomorfo al conjunto de) los polinomios homogéneos lineales.

Definimos el haz $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) := \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$; es el fibrado en líneas definido en los $\mathbb{A}_i^n$, pero con funciones de transición $[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto (x_j/x_i)^d$. Podemos identificar $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ con los polinomios homogéneos de grado d.

Proposición 0.4. *Todo fibrado vectorial de rango 2 sobre $\mathbb{P}^1$ se puede descomponer (es decir, se puede escribir como la suma de dos haces invertibles).*

Sabemos (por las sesiones anteriores) que todo haz invertible sobre $\mathbb{P}^1$ es de la forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ para algún m. Así, si E se descompone, entonces se escribe de la forma $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ para algunos enteros m, n. Vimos antes que si tensorizamos por un fibrado en líneas entonces la proyectivización de nuestro fibrado vectorial de rango 2 no cambia. Entonces si m es el mínimo entre m y n y tensorizamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$, obtenemos

$$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(E) = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}((\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-m)),$$

donde $n - m \geq 0$. Por lo tanto, podemos reformular la proposición anterior como:

Proposición 0.4.' *Todo fibrado vectorial de rango 2 sobre $\mathbb{P}^1$ se puede descomponer (es decir, se puede escribir como la suma de dos haces invertibles). En particular, toda superficie geométricamente reglada sobre $\mathbb{P}^1$ es isomorfa a una de las superficies de Hirzebruch*

$$\mathbb{F}_d = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$$

para $d \geq 0$.

Queremos ver ahora cómo es el grupo de Picard de una superficie geométricamente reglada.

Proposición 0.5. *Sea $S = \mathbb{P}_C(E)$ una superficie geométricamente reglada sobre C con el morfismo $p : S \to C$. Entonces existe un elemento $h \in PicS$ tal que*

1. $PicS = p^*(PicC) \oplus \mathbb{Z}h$
2. $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, *donde f es la clase de una fibra*
3. $h^2 = \deg E$ *(donde $\deg E := \deg(\wedge^2 E)$; notamos que $\wedge^2 E \in PicC$)*
4. $[K] = -2h + (\deg E + 2g_C - 2)f$ *en $H^2(S, \mathbb{Z})$.*

Recordemos que $q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S)$ (irregularidad), $p_g(S) = h^2(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K))$ (género geométrico), $P_n(S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(nK))$ para $n \geq 1$ (el n-ésimo plurigénero) y $b_i(S) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$ (los números de Betti). Tenemos entonces que

Proposición 0.6. *Si S es una superficie reglada sobre C, entonces $q(S) = g(C)$, $p_g(S) = 0$ y $P_n(S) = 0$ para todo $n \geq 2$. Si S es geométricamente reglada, entonces*

$$K_S^2 = 8(1 - g(C))$$

$y\ b_2(S) = 2.$