# SSA SESIÓN 2: CURVAS E INTERSECCIÓN SOBRE UNA SUPERFICIE ALGEBRAICA (POR GIANCARLO URZÚA)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

Hoy una superficie $X$ será proyectiva irreducible no singular sobre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

Superficies regularmente se estudian a través de las curvas que viven en ella. Una curva $\Gamma$ en $X$ es una curva proyectiva irreducible en $X$; puede ser singular o no singular. El punto es que localmente en $X$ la curva $\Gamma$ está definida por ideales primos. Notar que sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ estamos hablando de algo de dimensión real 2; si $\Gamma$ es no singular, entonces una curva es simplemente una superficie de Riemann compacta dentro de $X$.

Un personaje fundamental es el grupo libre abeliano generado por todas las curvas en $X$

$$\mathrm{Div}(X) = \{n_1\Gamma_1 + \ldots + n_s\Gamma_s \colon n_i \in \mathbb{Z}, \Gamma_i \text{ es una curva en } X\}.$$

Los elementos de este grupo se llaman divisores (de Weil).

Una función racional $f \neq 0$ (i.e. $f \in \mathbb{K}(X)^*$) siempre define un divisor; informalmente se construye de la siguiente manera. Tenemos que $X$ es proyectivo en algún $\mathbb{P}^n$, y $f = \frac{A}{B}$ para algunos polinomios homogéneos del mismo grado en $n+1$ variables, tal que $B$ no es igual a cero restringida a $X$. Las variedades en $X$ definidas por $A = 0$ y $B = 0$ producen un número finito de curvas en $X$. Sea $\Gamma_i$ una de esas curvas, entonces localmente es definida por un polinomio $(g_i = 0)$ (ya que $X$ es no singular). Si restringimos $A$ a ese abierto, veremos que $A = g_i^{m(A)}u$, donde $u$ es una función no identicamente cero en $\Gamma_i$. Lo mismo para $B$, y así $f$ produce un entero $\nu_{\Gamma_i}(f) := m(A) - m(B)$. Este número está bien definido (si describimos lo que expliqué en términos algebraicos precisos). De esta forma,

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{\Gamma} \nu_{\Gamma}(f)\Gamma.$$

Esta suma es finita, pues para las $\Gamma$ no apareciendo en $A = 0$ o $B = 0$ ponemos $\nu_\Gamma(f) = 0$. Un $D \in \mathrm{Div}(X)$ será divisor principal si existe $f \in \mathbb{K}(X)^*$ tal que $D = \mathrm{div}(f)$. Notar que el conjunto de todos los divisores principales forma un subgrupo de $\mathrm{Div}(X)$. Se define el grupo de clases de $X$ como

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{Div}(X)/\{ \text{ divisores principales } \}.$$

Decimos que $D$ y $D'$ son linealmente equivalentes ($D \sim D'$) si $D - D'$ es un divisor principal.

*Date*: 31 de agosto de 2011.

**Observación 0.1.** Este grupo abeliano es un invariante biregular de $X$, y es en general difícil de calcular. En la sesión anterior, todos los invariantes numéricos eran invariantes biregulares. Además, por ejemplo, si $X = (F_4 = 0)$ en $\mathbb{P}^3$, entonces todos estos invariantes numéricos son iguales (aunque algunos de estos $X$ no son biregulares) pero $\mathrm{Cl}(X)$ varía desde $\mathbb{Z}$ a grupos de mayor rango.

**Observación 0.2.** Recordamos que divisores sobre una curva fija son sumas finitas formales de puntos (en la curva) con coeficientes en $\mathbb{Z}$. En dimensiones mayores, se consideran sumas formales de variedades irreducibles de codimension 1. Divisores principales se definen de manera análoga, y también el grupo de clases.

Un divisor $D = \sum n_i \Gamma_i$ es <u>efectivo</u> si $n_i > 0$ para todo $i$. Si $D$ es efectivo, escribimos $D \geq 0$. Notar que un divisor efectivo viene a ser una curva reducible con multiplicidades en sus factores.

**Ejemplo 0.1.** En $X = \mathbb{P}^2$, un polinomio irreducible homogéneo $F$ define una curva en $X$. Un divisor es una suma formal de estas curvas con coeficientes positivos y/o negativos enteros. Si el divisor es efectivo, entonces representa exactamente lo que representa un polinomio homogéneo no necesariamente irreducible, donde los exponentes de sus factores irreducibles son los coeficientes del divisor.

Otra manera de definir lo mismo es usando haces. Las ventajas son el uso de sus secciones para producir aplicaciones racionales (a veces regulares), cálculos en cohomología (comparando con otros haces), invariantes cohomológicos, etc. Para resumir, habrá una biyección entre $\mathrm{Div}(X)$ y haces de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libres de rango 1 (también llamados <u>haces invertibles</u>). La versión geométrica de estos haces invertibles son los divisores de Cartier.

Un <u>divisor de Cartier</u> es una colección $\mathcal{L} = \{(U_i, f_i)\}_i$ donde $\bigcup_i U_i = X$, $f_i \in \mathbb{K}(X)^*$, tal que $\frac{f_i}{f_j}$ es una unidad en $U_i \cap U_j$ para todo $i, j$. Como haz de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$\mathcal{L}(U_i) = \{f \in \mathbb{K}(X)^* \colon \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(f_i) \geq 0 \text{ en } U_i\} = \frac{1}{f_i}\mathcal{O}_X(U_i).$$

Un divisor de Cartier es principal si existe $f \in \mathbb{K}(X)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i$, esto es, las unidades que pegan son todas 1. Estos haces invertibles tienen una operación producto conmutativa via $\otimes$ (como módulos) lo que en la práctica se traduce en multiplicar las $f_i$ del uno con las del otro. Cada haz invertible $\mathcal{L}$ tiene su inverso (con respecto a este producto) $\mathcal{L}^{-1}$ en donde todas las $f_i$ se cambian por $\frac{1}{f_i}$. De esta forma, los divisores de Cartier forman un grupo abeliano $\mathrm{CaDiv}(X)$ el cual posee un subgrupo de divisores principales (de Cartier). Se define el <u>grupo de Picard</u> de $X$

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{CaDiv}(X)/\{\text{divisores principales}\}.$$

**Teorema 0.1.** *Sea $X$ una superficie proyectiva no singular irreducible. Entonces, Div$(X)$ $\simeq$ CaDiv$(X)$ tal que divisores principales se identifican con divisores principales de Cartier. Así, Cl$(X) \simeq$ Pic$(X)$.*

La idea es que cada $\mathcal{L} = \{(U_i, f_i)\}_i$ define un divisor global $D = \Sigma_i \mathrm{div}(f_i|_{U_i})$. Notar que $D$ está bien definido ya que en las intersecciones $\mathrm{div}(f_i) = \mathrm{div}(f_j)$ ($\frac{f_i}{f_j}$ es unidad en $U_i \cap U_j$). A su vez, un divisor $D$ está definido localmente por el divisor de una función racional, etc. Este isomorfismo asocia a cada $D \in \mathrm{Div}(X)$ el haz invertible cuyo valor en un abierto $U$ es

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in \mathbb{K}(X)^* \colon \mathrm{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\}.$$

De esta manera, las secciones globales de $\mathcal{O}_X(D)$ son

$$\mathcal{O}_X(D)(X) = H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in \mathbb{K}(X)^* \colon \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}$$

el cual sabemos es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita $h^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Este es el <u>sistema lineal</u> asociado a $D$. Más bien, el sistema lineal de $D$ está compuesto por todas las $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$. Puede perfectamente ser un conjunto vacío. Dada una base en $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$, tenemos una aplicación (a priori sólo) racional

$$\varphi_D \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^{h^0(X, \mathcal{O}_X(D))-1},$$

cuando $h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) > 0$.

**Observación 0.3.** Dado un divisor efectivo $D$ (i.e. una curva reducible con componentes múltiples (un esquema de codimensión uno)) el haz de ideales que define la variedad $D$ (con multiplicidades incluidas) es $\mathcal{O}_X(-D)$. Típicamente se hará uso de la secuencia exacta corta

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

De gran importacia es la clase canónica $K_X$ definida por cualquier divisor $K_X$ tal que

$$\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \Omega^2_X.$$

En la sesión 1 la definimos más informalmente. Sus potencias $\mathcal{O}_X(nK_X)$ producen las <u>aplicaciones pluricanónicas</u>

$$\varphi_{nK_X} \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^{h^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X))-1}.$$

El número $h^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X))$ se llama <u>$n$-ésimo plurigénero</u> de $X$.

**Ejemplo 0.2.** En $X = \mathbb{P}^2$ es fácil ver que para cada divisor $D$ existe $n$ tal que $D \sim nL$ donde $L$ es una recta cualquiera. Con esto se puede mostrar que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$. La clase de un divisor $D$ en $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$ se representa por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(nL) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(D)$. Para los respectivos sistemas lineales tenemos:

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)) = \{\text{divisores efectivos de grado } n\} = \{\text{polinomios homogéneos de grado } n\}$$

para $n > 0$, $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = \mathbb{K}$, y $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)) = 0$ para $n < 0$. Así cuando $n > 0$, tenemos $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)) = \binom{n+2}{2}$. Por ejemplo, la aplicación $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ definida por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ es la inmersión de Veronese de grado 2, etc. Notar tambien que la clase canónica $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(K_{\mathbb{P}^2})$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$, lo que muestra la no existencia de aplicaciones pluricanónicas.

Para información precisa acerca de Divisores de Weil y Cartier, mirar la sección de Divisores del [3]. Cuando la variedad $X$ es singular, estas nociones son diferentes.

Ahora pondremos un producto de intersección

$$D \cap D' := D.D'$$

para no sólo divisores sobre $X$ sino que también estará definido para sus clases en $\mathrm{Pic}(X)$. Eso significa que si $D \sim D'$ entonces $D.\Gamma = D'.\Gamma$ para toda curva $\Gamma$. Notar que $\mathrm{div}(f).D = 0$ para todo $f \in \mathbb{K}(X)^*$. Este producto será simétrico ($D.D' = D'.D$), y bilineal.

Localmente representa lo siguiente para curvas.

**Definición 0.1.** Sean $\Gamma$, $\Gamma'$ dos curvas (irreducibles) distintas en $X$, y sea $x \in \Gamma \cap \Gamma'$. Alrededor de $x$, las curva $\Gamma$ es definida por una función $f = 0$ y $\Gamma'$ por $g = 0$, con $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$ = anillo local de $X$ en $x$ (como sabemos, $X$ es localmente definida a través de anillos $A_i$. El punto $x$ corresponde a un ideal maximal $m_x$ de $A_i$. Entonces $\mathcal{O}_{X,x} = A_{im_x}$). Se define la multiplicidad de intersección de $\Gamma \cap \Gamma'$ en $x$ como

$$(\Gamma.\Gamma')_x = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{X,x}/(f,g).$$

Notar que $\mathcal{O}_{X,x}/(f,g)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita.

Ya que la superficie es no singular, localmente estamos hablando de $\mathbb{A}^2_{x,y}$ y dos polinomios $f(x,y), g(x,y)$ irreducibles con un zero en común en el punto $(0,0)$. Por ejemplo, si $f(x,y) = x^n - y$ y $g(x,y) = y$, entonces este número de intersección es $n$. Dados $f(x,y) = \sum_d f_d(x,y)$ y $g(x,y) = \sum_e g_e(x,y)$ donde $f_d, g_e$ son sus sumandos homogéneos de grado $d, e$; entonces

$$(\Gamma.\Gamma')_{(0,0)} \geq d_0 e_0$$

donde $d_0, e_0$ son los grados mínimos. Tenemos igualdad si y sólo si $(f_{d_0}, g_{e_0}) = 1$.

**Ejemplo 0.3.** Este ejemplo está en el libro de curvas algebraicas de W. Fulton [2, p.40] (ese libro contiene un montón sobre intersección de curvas y más). En $\mathbb{A}^2_{x,y}$ con característica de $\mathbb{K}$ ni 2 ni 3, si $E = \{(x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0\}$ y $F = \{(x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0\}$, entonces $(E.F)_{(0,0)} = 14$ $(> 12)$.

Cuando $(\Gamma.\Gamma')_x = 1$ decimos que $\Gamma$ y $\Gamma'$ son <u>transversales</u> en $x$.

**Definición 0.2.** Sean $\Gamma$, $\Gamma'$ dos curvas distintas (irreducibles) de $X$. Definimos

$$(\Gamma.\Gamma') = \sum_{x \in X} (\Gamma.\Gamma')_x.$$

**Observación 0.4.** Para usar haces, interpretaremos el número $(\Gamma.\Gamma')$ como las secciones globales del haz de definición de $\Gamma \cap \Gamma'$ (contando multiplicidades en los puntos de intersección (i.e. como un esquema)). El haz de ideales que define esta intersección es $\mathcal{O}_X(-\Gamma) + \mathcal{O}_X(-\Gamma')$ donde $+$ es la suma de ideales. El haz estructural de $\Gamma \cap \Gamma'$ es

$$\mathcal{O}_X/(\mathcal{O}_X(-\Gamma) + \mathcal{O}_X(-\Gamma')) =: \mathcal{O}_{\Gamma \cap \Gamma'}$$

de donde $(\Gamma.\Gamma') = h^0(X, \mathcal{O}_{\Gamma \cap \Gamma'})$.

Ahora daremos la definición de producto de intersección en $\mathrm{Pic}(X)$.

**Teorema 0.2.** *Dados $D, D' \in Pic(X)$, se define*

$$D.D' := \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(-D) - \chi(-D') + \chi(-D - D').$$

*Recordar que $D$ corresponde a un haz invertible $\mathcal{O}_X(D)$, y de esta forma $\chi(D)$ es $\chi(X, \mathcal{O}_X(D))$. Entonces $(\cdot.\cdot)$ es simétrica, bilineal, tal que si $D, D'$ son curvas distintas, entonces $(D.D')$ coincide con la definición anterior.*

La simetría es trivial. La coincidecia para curvas distintas $\Gamma$, $\Gamma'$ es a través de la secuencia exacta natural

$$0 \to \mathcal{O}_X(-\Gamma - \Gamma') \to \mathcal{O}_X(-\Gamma) \oplus \mathcal{O}_X(-\Gamma') \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\Gamma \cap \Gamma'} \to 0$$

donde usamos que $\mathcal{O}_X$ es localmente un anillo de factorización única. Ver [1] para los detalles. Despues de eso, simplemente se aplica $\chi$ la cual es aditiva (recomiendo hacerlo) y el resultado sale.

La bilinealidad contiene otro ingrediente clave: dado un divisor $D$, existen curvas no singulares $A$ y $B$ tal que $D \sim A - B$. De esta forma, para probar bilinealidad, será importante saber qué es $(D.\Gamma)$, donde $D$ es un divisor arbitrario y $\Gamma$ es una curva no singular.

**Lema 0.1.** $D.\Gamma = grado(D|_\Gamma)$*. Recordamos que la restricción del divisor (o haz invertible) $D$ en $\Gamma$ es un divisor en $\Gamma$, i.e., una suma finita de puntos con coeficientes en $\mathbb{Z}$. El grado es la suma de los coeficientes.*

La demostración de este lema parte con la secuencia que define $\Gamma$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-\Gamma) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_\Gamma \to 0.$$

Luego aplicamos $\otimes \mathcal{O}_X(-D)$ lo cual no afecta la exactitud de la sequencia (haz localmente libre)

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \otimes \mathcal{O}_X(-\Gamma) \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X(-D)|_\Gamma \to 0.$$

Por definición y a partir de estas dos secuencias, tenemos

$$\Gamma.D = \chi(\mathcal{O}_\Gamma) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)|_\Gamma)$$

y Riemann-Roch para curvas proyectivas no singulares (sobre $\mathbb{K}$, no necesitamos $\mathbb{C}$) dice

$$-\text{grado}(-D|_\Gamma) = \chi(\mathcal{O}_\Gamma) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)|_\Gamma),$$

con lo cual tenemos el resultado.

El final de la demostración de bilinealidad es ahora trivial usando los resultados recién presentados. Ver [1, p.4].

## Referencias


1. A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
2. W. Fulton. *Algebraic curves*, Addison-Wesley Publishing Company, INC. 2008 (poner en el Google .ªlgebraic curves fulton").
3. R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.