SSA SESIÓN 3: CURVAS E INTERSECCIÓN II: EJEMPLOS E INTEPRETACIÓN TOPOLÓGICA (POR GIANCARLO URZÚA)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

Iniciamos esta sesión haciendo un pequeño resumen de la parte de la teoría que se ha presentado hasta el momento. Hoy X es una superficie proyectiva no-singular (irreducible) sobre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

Hemos definido al conjunto de Divisores de Weil como el grupo libre abeliano sobre el conjunto de curvas irreducibles de X, es decir, todas las sumas formales finitas de la forma $\sum_\Gamma a_\Gamma \cdot \Gamma$ con $a_\Gamma \in \mathbb{Z}$ y Γ curvas irreducibles en X ($a_\Gamma = 0$ excepto finitas curvas). Decimos que un divisor es principal cuando viene de una funcion racional, es decir, cuando es de la forma $\operatorname{div}(f) := \sum_\Gamma \nu_\Gamma(f) \cdot \Gamma$ (Γ esta localmente definida por una hipersuperficie y este ν_Γ viene dado por el exponente de la ecuación que define a esta curva en la restricción de f a este abierto).

Un Divisores de Cartier es un conjunto de parejas $\{U_i, f_i\}$ con $\bigcup_i U_i = X$, $f_i \in \mathbb{K}(X)$ tal que $\dfrac{f_i}{f_j}$ es unidad en $U_i \cap U_j$. Aqui los divisores principales vienen dados por los que vienen de restricciones de $f \in \mathbb{K}(X)$, en otras palabras cuando existe un $f \in \mathbb{K}(X)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$.

En los apuntes de la sesión 2 se ha explicado la vinculación que existe entre estos divisores, consideraremos a $\mathcal{O}_X(D)$ el divisor de Cartier asociado al divisor de Weil D. Anotamos por $\operatorname{Div}(X)$ a los divisores de Weil y por $\operatorname{CaDiv}(X)$ a los de Cartier. Dos grupos importantes salen de esto: $\operatorname{Pic}(X) = \operatorname{CaDiv}(X)/\{\text{divisores principales}\}$ (grupo de Picard) y $\operatorname{Cl}(X) = Div(X)/\{\text{divisores principales}\}$ (grupo de clases). En nuestro caso (no-singular), $\operatorname{Pic}(X) \simeq \operatorname{CaDiv}(X)$ (mirar la sessión anterior).

Dados $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$, ya se ha presentado la teoría para definir el número de intersección entre estos divisores. Ocuparemos la notación $D.D'$ para indicar a este número de intersección. La idea es que este valor cuente lo que nosotros esperaríamos por cantidad total de intersecciones entre ciertas curvas (contando multiplicidades e identificando la curva Γ con el divisor que tiene $a_\Gamma = 1$ y cero en el resto de coeficientes). En efecto, dado $p \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, localmente en p se tiene $\Gamma_1 = (f = 0), \Gamma_2 = (g = 0)$, la intersección en p es $(\Gamma_1.\Gamma_2)_p = \dim_{\mathbb{K}} \dfrac{O_{X,p}}{(f,g)}$ y se cumple que la suma de estas intersecciones locales nos da precisamente el número de intersección.

En general tenemos las siguientes propiedades

Date: 8 de septiembre de 2011.

1. $D.D' = D'.D$ (Simetría)
2. $D.(D' + D'') = D.D' + D.D''$ (Bilineal)
3. $D.Div(f) = 0$, $\forall f \in \mathbb{K}(X)$ y $\forall D \in Div(X)$

De 3. se desprende que $D \sim D' \Rightarrow D.\Gamma = D'.\Gamma$ para toda curva Γ en X.

Ejemplo 0.1. Sea $X = \mathbb{P}^2$. Tomemos F_d, F'_d polinomios irreducibles de grado d y d' respectivamente. Consideremos $X_d = \{F_d = 0\}$ y $X'_d = \{F'_d = 0\}$. Ambas curvas irreducibles. Sabemos que $Pic(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$ (generado por la clase de una recta), y que $X_d \sim dL$, $X'_d \sim d'L'$ para cualquier pareja de rectas L y L'. Se sigue que $X_d.X'_d = (dL).(d'L') = dd'(L.L') = dd'$. Esto es el Teorema de Bezout.

Observación 0.1. Denotamos $O_{\mathbb{P}^2}(d)$ a la clase de curvas de grado d, claramente estan todos los polinomios de grado d cuando $d > 0$. Sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tenemos que $Pic(\mathbb{P}^2) = H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y la clase $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ en $H^2(X, \mathbb{Z})$ considerará también miembros topológicos. Por ejemplo, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ en $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$ es la clase de todas las rectas algebraicas $Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 = 0$, pero en $H^2(X, \mathbb{Z})$ hay muchas mas rectas! Por ejemplo tenemos las rectas pseudo-holomorfas (mirar en google).

Habiamos considerado la sessión pasada $E = ((x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0)$ y $F = (((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0)$, y afirmamos que $(E.F)_{(0,0)} = 14$. La manera geométrica de intersectar estas curvas complicadas es a traveź de explosiones de puntos sobre $(0, 0)$ (contando a el mismo). No entraremos en detalles de la explosión de un punto porque será estudiado con calma en un par de sesiones más.

Si hay una propiedad general útil:

Teorema 0.1. *Dada $E = (H + G = 0), F = (T + R = 0)$ donde H y T son las expresiones de mayor grado en las ecuaciones que definen E y F. Sea $G = \Pi_{i=1}^{k} L_i^{\alpha_i}$, $R = \Pi_{i=1}^{s} L_i'^{\beta_i}$. Entonces se cumple que $(E.F)_{(0,0)} \geq (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i)(\sum_{i=1}^{s} \beta_i)$. La igualdad se da si y sólo si L_i, L'_j son todos distintos.*

En nuestro ejemplo más arriba se tiene que $(E.F)_{(0,0)} \geq (1 + 1 + 1)(2 + 2) = 12$. Si consideramos las correspondientes curvas proyectivas asociadas $\overline{E}$ y $\overline{F}$, vemos que $\overline{E}.\overline{F} = 24$. ¿Dónde estan las otras 10 intersecciones?

Ejemplo 0.2. Sea $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Sea $h_1 = \pi_1^*(x), h_2 = \pi_2^*(x)$ las fibras en X sobre el punto $x \in \mathbb{P}^1$ (π_1 y π_2 las proyecciones canónicas). Como en $\mathbb{P}^1$ todos los puntos son linealmente equivalentes para las intersecciones no importa sobre que punto hacer el pullback, luego se tiene que $h_1^2 = 0 = h_2^2$ (de hecho, para cualquier fibracion sobre una curva tenemos $F^2 = 0$ para F una fibra, ver [1, p.4]). También vemos que $h_1.h_2 = 1$. Observar que $X \setminus \{h_1 \cup h_2\} = \mathbb{A}^2$ porque le estamos sacando un punto a cada $\mathbb{P}^1$ del producto. Como $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^2)$ es trivial se tiene que dado un divisor D, $D|_{\mathbb{A}^2} = \mathrm{div}(f)$ para cierta f racional. Se sigue que $D = div(f) + nh_1 + mh_2$, $f \in \mathbb{K}(X)$. Luego $D \sim nh_1 + mh_2$. Ahora tenemos un isomorfismo de grupos $\mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Pic}(X)$ donde $(1, 0) \to h_1$,

$(0,1) \to h_2$, en otras palabras $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}^2$. ¿ De qué manera se podría generalizar este ejemplo? ¿Éste cálculo?

Ahora fijemos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y usemos la topología inducida por $\mathbb{C}^n$ (recordar que X está en algún $\mathbb{P}^n$). Entonces miraremos haces analíticos, los abiertos base en cada punto de X serán bolas pequeñas de $\mathbb{C}^2$.

Sea $\mathcal{O}_{X,an}$ el haz de las funciones analíticas (con la operación $+$), $\mathcal{O}^*_{X,an}$ el haz de las funciones regulares que no toman el valor 0 (con la multiplicación) y sea $\mathbb{Z}$ el haz de las funciones localmente constantes con valores en $\mathbb{Z}$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_{X,an} \stackrel{\exp}{\to} \mathcal{O}^*_{X,an} \to 0,$$

donde $\exp(f)(z) := e^{2\pi i f(z)}$. Notamos que exp es sobreyectivo como aplicación entre haces, ya que localmente toda función holomorfa sin ceros posee un logaritmo.

La sucesión exacta de arriba induce una sucesión exacta larga de cohomología:

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_{X,an}) \to H^1(X,\mathcal{O}^*_{X,an}) \stackrel{c}{\to} H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_{X,an})$$

sin los H^0's ya que $H^0(X,\mathcal{O}_{X,an}) = \mathbb{C}$ y $H^0(X,\mathcal{O}^*_{X,an}) = \mathbb{C}^*$. Un punto importante es que los grupos de cohomología sobre haces algebraicos y analíticos coinciden por un teorema general de Serre (mirar GAGA: Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique). La manera de mirar divisores de Cartier a través de funciones racionales cuyo cociente son unidades en las intersecciones de dos abiertos, produce (despues de algún trabajo) el isomorfismo $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X,\mathcal{O}^*_X)$ (mirar por ejemplo [2, p.224]).

Así esta sucesión exacta larga produce

$$0 \to T \to \mathrm{Pic}(X) \to c(\mathrm{Pic}(X)) =: NS(X) \to 0.$$

El grupo $c(\mathrm{Pic}(X))$ es el grupo de Nerón-Severi $NS(X)$. Es un teorema que $NS(X)$ es un grupo abeliano finitamente generado, denotamos por $\rho(X)$ al rango de $NS(X)$: este es el número de Picard de X. A través del teorema de la descomposición de Hodge, se puede probar que $T = H^1(X,\mathcal{O}_X)/\mathrm{Im}(H^1(X,\mathbb{Z}))$ es una variedad abeliana de dimensión $q(X)$. Algunas veces se denota T por $\mathrm{Pic}^0(X)$.

De esta forma, el grupo de Picard tiene una parte continua T y otra discreta $NS(X)$, ambas no triviales en general. Recordamos que para una superficies de Riemann compacta, $\mathrm{Pic}(X)$ tiene como parte continua el Jacobiano de X y como parte discreta $\mathbb{Z}$: la imagen de la función grado de un divisor.

Para superficies algebraicas, el grupo $NS(X)$ es en general difícil de calcular y al menos contiene una copia de $\mathbb{Z}$ (dada por secciones hiperplanas)(X vive en un $\mathbb{P}^n$!). Otra observación es que la interseccion topológica en $H^2(X,\mathbb{Z})$ coincide con la intersección algebraica para clases en $NS(X)$.

Una pregunta natural es: ¿Cuáles son las clases algebraicas en $H^2(X,\mathbb{Z})$? Recordamos que por Hodge

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \subseteq H^2(X,\mathbb{C}) = H^2(\mathcal{O}_X) \oplus H^1(\Omega^1_X) \oplus H^0(\Omega^2),$$

donde $H^2(\mathcal{O}_X)$ y $H^0(\Omega^2)$ son duales. El Teorema (1-1)-Lefschetz da la respuesta precisa: $NS(X) = H^1(\Omega^1_X) \cap H^2(X,\mathbb{Z})$. La famosa conjetura de Hodge es acerca de la pregunta: ¿Cuáles son las clases algebraicas en dimensiones mayores?

Ejemplo 0.3. Si X es una superficie con $q(X) = 0$ (y las hay de todos los tipos) tenemos que $T = \{0\}$ (cosa que para superficies de Riemann sólo sucede con $\mathbb{P}^1$). Si además tenemos $p_g(X) = 0$, entonces por lo anterior $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X,\mathbb{Z})$. Un ejemplo de esto es $\mathbb{P}^2$, pero sorprendentemente existen este tipo de superficies en todas partes, incluso de tipo general (las más complicadas de estudiar). Un ejemplo no muy complicado es el siguiente. Considerar

$$X = (x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0)$$

en $\mathbb{P}^3$ (calcula sus invariantes). Tiene una acción de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ a través de

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_0, \lambda x_1, \lambda^2 x_2, \lambda^4 x_3]$$

con $\lambda^5 = 1$, $\lambda \neq 1$. Esta acción no fija puntos, y el cociente es nuevamente una superficie proyectiva no-singular $Y = X/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. En estas situaciones, los invariantes χ, K^2, χ_{top} se comportan de manera multiplicativa: $\chi(X) = 5\chi(Y)$, $K_X^2 = 5K_Y^2$ y $\chi_{\text{top}}(X) = 5\chi_{\text{top}}(X)$. También notar que $\pi_1(X) = 1$. Entonces $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. De esta forma, $q(Y) = 0$. Entonces $\chi(X) = 5 = 5(1 + p_g(Y))$ implica $p_g(Y) = 0$. Esta superficie Y es de tipo general, y es un ejemplo famoso llamado superficie de Godeaux. Esto también muestra que $NS(Y)$ tiene torsión. El cubrimiento $X \longrightarrow Y$ define una clase $D \in \mathrm{Pic}(Y)$ con $5D \sim 0$ pero D no es ~ 0. Hablaremos más adelante acerca de cubrimientos por el estilo (cubrimientos abelianos con ramificación).

Referencias

1. A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
2. R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.