SSA SESIÓN 4: ALGUNOS TEOREMAS GENERALES PARA CALCULAR SOBRE SUPERFICIES ALGEBRAICAS (POR GIANCARLO URZÚA)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

En esta sesión partiremos viendo dos temas que son clásicos para curvas algebraicas, y serán de mucha utilidad en nuestro estudio de superficies: la dualidad de Serre y el teorema de Riemann-Roch.

Teorema 0.1. (Dualidad de Serre) *Sea X una variedad (irreducible) proyectiva no singular sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, y sea $\mathcal{F}$ un haz de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libre. Entonces,*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(K_X))^\vee,$$

para todo $i \geq 0$, donde $\mathcal{F}^\vee$ es el haz dual de $\mathcal{F}$ y K_X es cualquier divisor en X tal que $\mathcal{O}(K_X)_X \simeq \bigwedge^n \Omega^1_X$ (i.e. un divisor canónico).

Recordamos que el haz dual de $\mathcal{F}$ se define como el haz $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

Como corolario de la dualidad de Serre, obtenemos lo siguiente:

Corolario 0.1. *Si $\dim X = 1$, entonces $h^1(X, D) = h^0(X, K_X - D)$. Si $\dim X = 2$, entonces $h^2(X, D) = h^0(X, K_X - D)^\vee$. En general, tendremos que $h^n(X, K_X) = h^0(X, K_X - K_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{K}$.*

En lo que sigue veremos cómo usar la dualidad de Serre para obtener información importante acerca de nuestra variedad, y en particular se manifestará en el teorema de Riemann-Roch. El teorema de Riemann-Roch esencialmente describe una relación entre $\chi(\mathcal{O}_X(D))$ y números de intersección de D con K_X.

Partiremos haciendo un breve resumen (mas bien un recordatorio) del teorema de Riemann-Roch para curvas. Sea X una curva proyectiva no singular de género $g = h^1(\mathcal{O}_X)$. Sea también $D = \sum_i n_i P_i$ un divisor en X; definimos

$$\deg D := -\chi(\mathcal{O}_X) + \chi(\mathcal{O}_X(D)).$$

Queremos mostrar que esta definición de grado es igual a la definición usual (la suma de los coeficientes de D). Fijando un punto $P \in X$ y poniendo $D = P$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(-P) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_P \to 0.$$

Date: 22 de septiembre de 2011.

Al tomar el producto tensorial de cada miembro con $\mathcal{O}_X(P)$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(P) \to \mathcal{O}_P \otimes \mathcal{O}_X(P) \to 0.$$

Como $\mathcal{O}_P \otimes \mathcal{O}_X(P) \simeq \mathcal{O}_P$ (usar proyectividad de la curva e hiperplanos pasando y no pasando por P) y la característica de Euler es una función aditiva, obtenemos que $\chi(\mathcal{O}_X(P)) = \chi(\mathcal{O}_X) + \chi(\mathcal{O}_P) = 1 - g + 1$. En particular, $\deg D = 1$, lo cual es consistente con la definición usual. Se repite el proceso anterior con mP ($m \geq 0$), y se ve que $\deg mP = m$. Reemplazando otra vez con $mP + rQ$ (con $m, r \geq 0$), se demuestra que $\deg(mP + rQ) = m + r$, y así por inducción se demuestra que las definiciones coinciden para todo divisor efectivo. Si D es un divisor cualquiera, se puede escribir como $D = N - P$ con N y P efectivos, y se tiene la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(N - P) \to \mathcal{O}_X(N) \to \mathcal{O}_P \to 0.$$

Si tomamos χ, se tiene entonces que para todo divisor las definiciones de grado coinciden. Llegamos entonces al Teorema de Riemann-Roch para curvas:

Teorema 0.2. *(Riemann-Roch) Para todo divisor D en una curva X, se tiene que*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \deg D + 1 - g(X) = \deg D + \chi(\mathcal{O}_X).$$

La dualidad de Serre nos dice que $\chi(\mathcal{O}_X(D)) = h^0(D) - h^0(K_X - D)$. También es obvia la cota de Riemann:

$$h^0(D) \geq \deg D + 1 - g(X).$$

Riemann obtuvo esta cota en el año 1857, y luego Roch encontró el término error de la desigualdad en el año 1865. El Teorema de Riemann-Roch tiene dos consecuencias inmediatas:

Corolario 0.2. $g(X) = 0$ *si y solamente si* $X \simeq \mathbb{P}^1$.

Demostración Sean $P, Q \in X$ distintos, y aplique Riemann-Roch al divisor $D = P - Q$. Como $\deg(K_X - D) = -2$, tenemos que $h^0(K - D) = 0$, y entonces $h^0(D) = 1$. Sea $f \in \mathbb{K}(X)$ tal que $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$. Entonces f tiene un polo de orden 1 y así el grado de la correspondiente aplicación $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ es uno, es decir, un isomorfismo. □

Corolario 0.3. $\deg K_X = 2g - 2$

Demostración Reemplazando por $K_X = D$ en la fórmula de Riemann-Roch, obtenemos que

$$h^0(K_X) - h^0(0) = \deg K_X + 1 - g,$$

es decir, $\deg K_X = h^0(K_X) - 1 - 1 + g = h^0(K_X) + g - 2 = 2g - 2$. $\square$

Enunciaremos y probaremos ahora el Teorema de Riemann-Roch para superficies algebraicas.

Teorema 0.3. *(Riemann-Roch) Para todo divisor D en una superfice (proyectiva suave) X, se tiene que*

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2}D.(D - K_X) + \chi(\mathcal{O}_X),$$

o en otras palabras

$$h^0(D) - h^1(D) + h^0(K_X - D) = \frac{1}{2}D.(D - K_X) + 1 - q(X) + p_g(X).$$

Demostración Tenemos que

$$-D.(D - K_X) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(D) - \chi(K_X - D) + \chi(K_X),$$

y por la dualidad de Serre, obtenemos que $-D.(D - K_X) = 2\chi(\mathcal{O}_X) - 2\chi(D)$. $\square$

Como aplicación del teorema de Riemann-Roch para superficies, vemos que si D es un divisor y H es una sección hiperplana tal que $D^2 > 0$ y $D.H > 0$, entonces mD es efectivo para m suficientemente grande. Esto se ve porque en tal caso se tiene que

$$h^0(mD) + h^0(K_X - mD) \geq \frac{m^2}{2}D^2 - \frac{m}{2}D.K_X + \chi(\mathcal{O}_X,)$$

y para m suficiente grande tenemos que $h^0(K_X - mD) = 0$, ya que $H.(K_X - mD) < 0$ para $m >> 0$ y H intersecta cualquier divisor efectivo positivamente. $\square$

Observación 0.1. Definimos la relación $\equiv$ en $\mathrm{Pic}(X)$, donde $D \equiv D'$ si y solamente si $D.\Gamma = D'.\Gamma$ para toda curva irreducible Γ. Se tiene entonces que $\mathrm{Num}(X)_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Pic}(X)/\equiv$ es un grupo libre abeliano finitamente generado. Si ponemos $N_1(X) = \mathrm{Num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, entonces la forma de intersección en $N_1(X)$ diagonaliza como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Ese es el teorema del índice de Hodge. Sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en $H^2(X, \mathbb{R})$ existe una forma the intersección B no degenerada tal que

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ponemos b^+ como el número de 1's en la diagonal y b^- como el número de -1's en la diagonal, definimos $\mathrm{sign}(X)$ como $b^+ - b^-$.

Teorema 0.4. *(índice de Hirzebruch) sign$(X) = \frac{1}{3}(K_X^2 - 2\chi_{top}(X))$.*

Ejemplo 0.1. En el caso de dos curvas no singulares tenemos $\mathrm{sign}(C_1 \times C_2) = 0$. Para intersecciones completas $X_{d_1,\ldots,d_r}$ se puede probar que $\mathrm{sign}(X) < 0$. Superficies algebraicas con signatura positiva existen pero son m'as complicadas de explicitar. Por ejemplo, es un teorema de Hirzebruch que si el cociente de la bola compleja de dimension dos por un grupo de automorfismos es una superficie proyectiva suave, entonces $K^2 = 3\chi_{\mathrm{top}} > 0$. Es en efecto una equivalencia gracias a Yau (y Miyaoka) para superficies de tipo general.

Ahora introduciremos una generalización del teorema clásico de Riemann-Roch en todas dimensiones.

Teorema 0.5. *(Hirzebruch - Riemann - Roch) Sea X una variedad proyectiva no singular de dimensión n sobre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Se tiene $\chi(O_X(D)) = grado_n\ (ch(D).td(X))$. Aquí $ch(D) = 1 + c_1(D)$ y $td(X)$ son clases de intersección y $-.-$ es la intersección. $Grado_n$ significa tomar el grado de la clase de intersección resultante de dimensión cero* [2, Ap. Intersección]. *La clase $td(X)$ denota la clase de Todd de X. Ella involucra clases de Chern de X, las cuales se definen a través de Ω_X^1.*

Observación 0.2. De aquí (H-R-R) se deduce que $12\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + c_2(X)$ ($= K_X^2 + \chi_{top}(X)$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Ésta se conoce como al Fórmula de Noether, quien la demostró calculando los tres términos involucrados para cierto modelo de X en $\mathbb{P}^3$ (en general singular!).

Hasta ahora parece muy importante el rol de la clase canonica para calcular sobre una superficie. Ya que nuestras superficie son proyectivas, en algún $\mathbb{P}^n$, y sabemos $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H$ donde H es un hiperplano cualquiera, tiene sentido preguntarse lo siguiente. Dados $Y \subset X$ ambas variedades proyectivas lisas, ¿Cómo se relaciona K_Y con K_X?

Teorema 0.6. *(Fórmula de adjunción) Dados $Y \subset X$ ambas variedades proyectivas lisas con dim$(Y)+1=$dim(X), tenemos*

$$K_Y = (K_X + Y)|_Y.$$

Para codimensiones mayores ver [2, diferenciales].

Ejemplo 0.2. Consideremos $Y_d = (F_d = 0) \subset \mathbb{P}^n$ (suave e irreducible).
Se tiene $K_{Y_d} \sim ((-1-n)H + dH)|_{Y_d} \sim (d-1-n)H|_{Y_d}$.
Para $n=3$ obtenemos $K_{Y_d}^2 \sim (d-4)^2H^2|_{Y_d} = d(d-4)^2$ (geométricamente es una recta intersectando Y_d).
Para $d=1,2,3$ se tiene que $p_g(Y_d)=0$. Para $d=4$, $h^0(K_{Y_d}) = h^0(\mathcal{O}_X)=1$, en otras palabras $K_{Y_4} \sim 0$. Para $d \geq 5$, $p_g(Y_d) > 0$ (no racional).

Ejemplo 0.3. Sea $X_{d_1,\ldots,d_r} \subset \mathbb{P}^{d+2}$ una intersección completa no singular irreducible sobre $\mathbb{K}$. Se tiene $K_{X_{d_1,\ldots,d_r}} \sim (\sum_{i=1}^r d_i - 1 - n)H|_{X_{d_1,\ldots,d_r}}$.

Si $C \subset X$ es una curva suave en una superficie suave, entonces adjunción implica

$$K_C \sim (K_X + C)|C$$

y sabemos que $deg(K_C) = (K_X + C).C$ lo que implica

$$2g(C) - 2 = K_X.C + C^2.$$

Ejemplo 0.4. Consideremos $C_d \subset \mathbb{P}^2$, de lo anterior se tiene $2g(C_d)-2 = dH.(-3H + dH) = -3d + d^2$, por lo tanto $g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Sea Γ irreducible cualquiera (no necesariamente suave) en X, definimos

$$h^1(\mathcal{O}_\Gamma) = p_a(\Gamma) = \text{género aritmético de } \Gamma.$$

Ahora $\chi(O_C) = \chi(O_X) - \chi(O_X(-C)) = -\dfrac{-C.(-C-K_X)}{2}$, luego

$$2(1-p_a(C)) = C.(C+K_X).$$

Si $N \xrightarrow{\pi} C$ resuelve las singularidades de C (normalización de C) (usando explosiones de puntos en la superficie, podemos encontrar N, para despues) tenemos $g(N) = p_a(C) - \displaystyle\sum_{p \in sing(C)} \delta_p$ (δ_p depende de la singularidad y se calcula a través de explosiones, ya lo veremos).

Ejemplo 0.5. Sea $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Tomamos una curva $C \sim (n,m)$, $n,m \geq 0$. Tenemos que $2g(C)-2 = (n,m).((-2,-2)+(n,m)) = (n,m).(n-2,m-2) = m(n-2)+n(m-2)$ entonces $g(C) = (m-1)(n-1)$. Si $n,m > 0$ siempre existen curvas C suaves en la clase (n,m).

Ejemplo 0.6. $X_d \subset \mathbb{P}^3$ (donde X_d es una hipersuperficie no singular de grado d). Sea $L \subset X_d$ una línea. Queremos calcular L^2, para esto ocupamos el número de clase de X_d. Ver que $L^2 + L.K_d = 2 \cdot 0 - 2 = -2$. Sabemos que $K_{X_d} \sim (d-4)H|_{X_d}$ y obtenemos $L^2 = 2 - d$. Si $d = 1$, estas son líneas en un plano $\mathbb{P}^2$. Para $d = 2$ son las fibras en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $L^2 = 0$. Para $d = 3$ se tiene que $L^2 = -1$. Se mostrará en el futuro que curiosamente hay 27 líneas en toda cúbica suave y no más. Para $d = 4$, estas líneas son (-2)-curvas cuya presencia influye en el $\mathrm{Pic}(X_4)$. Algunas veces no hay líneas en X_4, cuando las hay, su número máximo es 64. El número máximo de líneas en X_d para $d \geq 5$ no es conocido.

Esto termina con el material del capítulo I de [1].

Referencias

1. A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
2. R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.