SSA SESIÓN 5: SUPERFICIES TÓRICAS (LOCAL) (POR JAN KIWI)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

Como es usual, consideraremos un cuerpo base arbitrario $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Para esta sessión se recomiendan las notas de Mircea Mustaţă [1].

Definición 0.1. Una variedad irreducible X se dice tórica si existe $T \subset X$ abierto que satisface las siguientes condiciones
i) $T \cong (\mathbb{K}^*)^n$ (toro) para algún $n \in \mathbb{N}$.
ii) Existe un morfismo $T \times X \to X$ extendiendo la multiplicación $T \times T \to T$ en T.

Observación 0.1. La acción $T \times T \to T$ esta dada por $((a_j), (b_j)) \mapsto (a_j b_j)$ (identificando a T con $(\mathbb{K}^*)^n$).

Ejemplo 0.1. Sea $X = (\mathbb{K}^*)^n$. La accioń es la usual y claramente se tiene

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, ..., x_n, x_n^{-1}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]/(x_1 y_1 - 1, \dots, x_n y_n - 1).$$

Ejemplo 0.2. Sea $X = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ y tomemos $T = (\mathbb{K}^*)^n \subset X$ junto con la acción usual de multiplicar coordenada por coordenada.

Ejemplo 0.3. En $P^n_{\mathbb{K}}$ tomemos $T = \{[x_0, \dots, x_n] | x_0 x_1 \cdots x_n \neq 0\} \cong (\mathbb{K}^*)^n$. La acción esta dada por $[t_0, \dots, t_n] \times [x_0, \dots, x_n] \mapsto [t_0 x_0, \dots, t_n x_n]$.

Ejemplo 0.4. Analogamente al ejemplo anterior en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ consideramos $T = \{[x, y] | xy \neq 0\} \times \{[u, v] | uv \neq 0\}$ y la acción esta dada por multiplicación por coordenadas.

En lo que sigue necesitaremos algunas definiciones algebraicas para presentar una forma de construir variedades tóricas.

Definición 0.2. Un **semigrupo** $(S, +)$ es un conjunto dotado de una operación asociativa, conmutativa y con un elemento neutro. Un semigrupo **afín** es un semigrupo finitamente generado como semigrupo (existen $u_1, ..., u_r$ tal que todo $s \in S$ se escribe como $s = \sum a_i u_i, a_i \in \mathbb{N}_0$) que esta incluido en algun grupo abeliano libre de rango finito ($S \hookrightarrow L = \mathbb{Z}^N$).

Definición 0.3. Dados los semigrupos $(S, +)$ y $(S', +')$ se dice que $\phi : S \to S'$ es un morfismo de semigrupos si $\phi(0) = 0'$ y $\phi(x + y) = \phi(x) +' \phi(y)$.

Date: 27 de septiembre de 2011.

Para esta sesión consideraremos a S como un semigrupo afín. Se denota S^{gr} al grupo generado por S en L (este grupo es intrínseco a S, no depende del grupo L que tomamos en un comienzo). Cada semigrupo afín S determina una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generada

$$\mathbb{K}[S] = \langle x^u | u \in S \rangle$$

donde las operaciones son las naturales.

Observar que si $u_1, ..., u_r$ son generadores de S entonces $\{x^{u_i}\}$ son los de $\mathbb{K}[S]$. Si consideramos la función $\varphi\colon \mathbb{K}[x_1, ..., x_r] \to \mathbb{K}[S]$ tal que $x_i \mapsto x^{u_i}$ vemos que φ es sobreyectiva. Luego $\mathbb{K}[S] = \mathbb{K}[x_1, ..., x_r]/(\ker \varphi)$. Tenemos un anillo de coordenadas (funciones regulares) de alguna variedad afín, esta variedad esta dada por

$$V(\ker \varphi) \subset \mathbb{A}^r_{\mathbb{K}}.$$

Usando la identificación de ideales maximales del anillo de coordenadas con los puntos de la variedad, podemos pensar en que Spec $\mathbb{K}[S] = V(\ker \varphi)$ (donde Spec lo consideramos como el espectro maximal del anillo). Como $\mathbb{K}[S] \subset \mathbb{K}[S^{gp}] = \mathbb{K}[\mathbb{Z}^N] = \mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, ..., x_n, x_n^{-1}]$ y este último es un dominio, se sigue que $\mathbb{K}[S]$ también lo es, y por ende Spec $\mathbb{K}[S]$ es irreducible.

Ejemplo 0.5. Tomemos $S = \{n \in \mathbb{N}_0 | n \neq 1\} = \langle 2, 3 \rangle$ (como semigrupo). En este caso φ toma la forma $x_0 \mapsto x^2$, $x_1 \mapsto x^3$. Dejamos como ejercicio verificar que $\ker \varphi = (y^2 - x^3)$ y por ende Spec $\mathbb{K}[S] = (y^2 - x^3 = 0) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$.

Dado $\phi : S \to (\mathbb{K}, \cdot)$ un morfismo de semigrupo puedo inducir un morfismo de $\mathbb{K}$-algebras $\phi : \mathbb{K}[S] \to \mathbb{K}$ dado por $\phi(x^u) = \phi(u)$ y $\phi(x^0) = 1$ (claramente es sobreyectivo), luego $\ker \phi$ es un ideal maximal de $\mathbb{K}[S]$, y por ende esta asociado a un punto de Spec $\mathbb{K}[S]$. Debemos recordar esta identificación entre los morfismos de $\mathbb{K}$-algebra de $\mathbb{K}[S] \to \mathbb{K}$ con los puntos de Spec $\mathbb{K}[S]$.

Recíprocamente, dada $\phi : \mathbb{K}[S] \to \mathbb{K}$ un morfismo de $\mathbb{K}$-algebras tengo que $\phi(x^{u+u'}) = \phi(x^u x^{u'}) = \phi(x^u)\phi(x^{u'})$, que induce un morfismo de semigrupos de $(S, +)$ a $(\mathbb{K}, \cdot)$. Sea $i : \mathbb{K}[S] \to \mathbb{K}[S^{gp}]$ la inclusión "canónica", puedo inducir una función $i_* :$ Spec $\mathbb{K}[S^{gp}] \to$ Spec $\mathbb{K}[S]$ dada por $\phi \mapsto \phi \circ i$. La propiedad importante que da sentido a todo lo que hemos precisado hasta el momento es la siguiente.

Teorema 0.1. *La aplicación $i^* :$ Spec $\mathbb{K}[S^{gp}] \to$ Spec $\mathbb{K}[S]$ tiene por imagen un abierto principal. Esta función es inyectiva y si consideramos $T = i^*($Spec $\mathbb{K}[S^{gp}])$ se tiene la acción $T \times$ Spec $\mathbb{K}[S] \to$ Spec $\mathbb{K}[S]$ dada por $(\phi, \psi) \mapsto \phi\psi$.*

Daremos sólo una idea general para probar este hecho. Consideremos $S = \langle u_1, ..., u_r \rangle_{sg}$ sus generadores. Observemos que al agregar el elemento $-(u_1 + ... + u_r)$ a este conjunto obtengo un grupo (estamos pensando $S \hookrightarrow L$). Además este elemento debe estar en S^{gp}. Se sigue que $\mathbb{K}[S^{gp}] = \mathbb{K}[S]_{x^{u_1 + ... + u_r}}$ (localización). Se prueba que el abierto principal imagen es el dado por $(x^{u_1 + ... + u_r} \neq 0)$. La acción va a venir dada por el morfismo de $\mathbb{K}$-algebras $\mathbb{K}[S] \to \mathbb{K}[S^{gp}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[S]$ definido por $x^u \mapsto x^u \otimes_{\mathbb{K}} x^u$.

Ejemplo 0.6. Consideremos $\sigma = \lambda(1,0)+\alpha(3,5)$ con $(\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$. Asumimos además que la característica de $\mathbb{K}$ no es 5. Tomemos

$$S = \sigma \cap \mathbb{Z}^2 = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | j/i \leq 5/3\} \cup \{(0,0)\}.$$

Claramente S es un semigrupo con la suma de vectores. Ahora consideremos

$$S' = \{(i,j) \in \frac{1}{5}\mathbb{N} \times \mathbb{N} | j/i \leq 5/3\} \cup \{(0,0)\}.$$

Puede verificarse que $S' =< (1/5,0),(3/5,1) >_{sg}$, luego $\mathbb{K}[S'] = \mathbb{K}[x^{(1/5,0)}, x^{(3/5,1)}] = \mathbb{K}[u,w]$. De la inclusion $S \subset S'$ se desprende $i^* : \text{Spec } \mathbb{K}[S'] \cong \mathbb{A}^2 \to \text{Spec } \mathbb{K}[S]$. Este aplicación es sobre.

Queremos analizar ahora cuándo $i^*(u,w) = i^*(u',w')$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[u,w] = \mathbb{K}[S] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr] & \\
\mathbb{K}[x^{(i,j)}] = \mathbb{K}[S'] \arrow[r, "\text{eval}"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi(x^{(i,j)}) = u^{5i-3j}w^j$ (para $j/i \leq 5/3$). Así, vemos que $i^*(u,w) = i^*(u',w')$ sí y solamente sí $u^{5i-3j}w^j = (u')^{5i-3j}(w')^j$ para todo $i,j \in \mathbb{N}_0$ tales que $j/i \leq 5/3$. Esto entonces ocurre sí y solamente sí existe una raíz quinta (que las hay!) de la unidad ξ tal que $u' = \xi u$ y $w' = \xi^3 w$.

Sea σ la transformación $(u,w) \mapsto (\xi u, \xi^3 w)$ para alguna raíz quinta primitiva de la unidad ξ. Observamos que $i^*(u,w) = i^*(u',w')$ sí y solamente sí ambos elementos están en la misma órbita bajo la acción de $G = \langle\sigma\rangle$, y así notamos que $\text{Spec } \mathbb{K}[S] = \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}/G$ (la variedad cociente).

Observamos que en el ejemplo anterior, solamente usamos el hecho de que $\text{mcd}(3,5) = 1$. Podemos entonces usar cualquier par de enteros (m,q) tal que $0 < q < m$, $(q,m) = 1$ y m no divisible por la carac$(\mathbb{K})$, y hacer lo mismo. Es decir, mostrar que la variedad tórica es el cociente de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ por un grupo cíclico.

Cuando la característica de $\mathbb{K}$ divide a m, tenemos igual un morfismo pero no es el inducido por la acción de un grupo cíclico.

Ejemplo 0.7. Para $m = 2$ y $q = 1$, tenemos

$$\mathbb{K}[S] = \mathbb{K}[x^2, xy, y^2] \subset \mathbb{K}[x,y] = \mathbb{K}[S']$$

lo cual indica que si la característica de $\mathbb{K}$ no es 2, entonces $\mathbb{K}[x^2,xy,y^2]$ es el anillo invariante por la acción

$$(x,y) \mapsto (-x,-y),$$

y entonces $\text{Spec}\mathbb{K}[S]$ es el cociente por $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ como antes. Si la característica es 2, entonces la extensión a nivel de cuerpos es puramente inseparable, la pre-imagen de cada punto es sólo un punto pero con multiplicidad 2, y la variedad $\mathrm{Spec}\mathbb{K}[x^2, xy, y^2]$ sigue siendo singular. Es simplemente

$$\mathrm{Spec}\mathbb{K}[u, v, w]/(w^2 - uv)$$

con exactamente el mismo tipo de sigularidad que en los casos de característica distinta a dos. Es decir, es un punto aislado con la misma resolución tórica (un $\mathbb{P}^1$ arriba del punto con intersección consigo misma -2)(resoluciones tóricas se verán la próxima sessión).

Enunciaremos ahora el teorema principal de estos apuntes, y su demostración tomará parte de la sesión siguiente. Recordemos primero unas definiciones:

Definición 0.4. Una variedad (irreducible) X es **normal** si $\mathbb{K}[X]$ es normal; es decir, si $f \in \mathbb{K}(X)$ y es entero sobre $\mathbb{K}[X]$ (satisface un polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{K}[X]$), entonces $f \in \mathbb{K}[X]$.

Definición 0.5. Un semigrupo S es **saturado** en S^{gp} si para todo $u \in S^{gp}$ tal que $mu \in S$ para algún $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $u \in S$.

Si X es una variedad tórica afín (no necesariamente normal), entonces corresponde a un semigrupo afín S. De hecho, las variedades tóricas afines normales corresponden exactamente a los semigrupos S saturados en S^{gp}.

Proposición 0.1. *Sea S un semigrupo afín. Entonces $S \simeq S' \times \mathbb{Z}^r$, donde S' es un semigrupo sin elementos invertibles.*

Teorema 0.2. *Sea X una superficie tórica afín normal. Entonces, X es isomorfo a $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{K}^*$, $(\mathbb{K}^*)^2$ ó a $\frac{1}{m}(1, q)$ para algunos q, m enteros con $0 < q < m$ y $(m, q) = 1$. La variedad tórica $\frac{1}{m}(1, q)$ es la descrita arriba, la cual es cociente cíclico de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ dependiendo de la característica de $\mathbb{K}$.*

Referencias

1. M. Mustaţă. *Lectures notes on toric varieties*, available in his web page, 2005.