SSA SESIÓN 7: LA EXPLOSIÓN DE UN PUNTO (BLOW-UP) (POR ANIBAL VELOZO)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

Trabajamos sobre $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$. Primero presentaremos la explosión del punto $p = [1, 0, \ldots, 0]$ en $\mathbb{P}^n$. Nos guiaremos a través de [2] y [1].

Definición 0.1. Sea $\Pi \subset \mathbb{P}^n_{x_0,\ldots,x_n} \times \mathbb{P}^{n-1}_{t_1,\ldots,t_n}$ la variedad dada por las ecuaciones $x_i t_j = x_j t_i$, $i, j \geq 1$. Esta variedad junto con el morfismo proyección a la primera coordenada $\epsilon : \Pi \to \mathbb{P}^n$ definen la explosión de $\mathbb{P}^n$ en p.

Primero veamos algunas propiedades generales de este blow up.

i) $\epsilon : \Pi \setminus (\{p\} \times \mathbb{P}^{n-1}) \to \mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ es un isomorfismo. La inversa esta dada por $\epsilon^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to \Pi \setminus (\{p\} \times \mathbb{P}^{n-1})$ que manda $[x_0, \ldots, x_n] \mapsto [[x_0, \ldots, x_n]; [x_1, \ldots, x_n]]$.

ii) Π es una superficie suave. Basta verificar que $q \in \epsilon^{-1}(p)$ es un punto no singular. Podemos suponer que $t_i \neq 0$ en q. Sea W_i el abierto dado por $x_0 \neq 0$ y $t_i \neq 0$, en esta vecindad de q el blow-up tiene por ecuaciones $x_j = x_i t_j$, verificar que existe un isomorfismo natural $\Pi \cap W_i \cong \mathbb{A}^n_{y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,y_{i+1},\ldots,y_n}$. Esto nos dice que en el punto q se tiene un espacio tangente de dimensión n.

iii) Sea L una recta por p, se puede verificar facilmente que la recta tiene la forma $L = \{[x_0, \ldots, x_k] \in \mathbb{P}^n | x_k = r\alpha_k, k \geq 1, r \in \mathbb{K}\}$ para algunas constantes $\alpha_k \in \mathbb{K}, k \geq 1$. Ver que $\epsilon^{-1}(L \setminus \{p\}) = \{[q; [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]] \in \Pi | q \in L \setminus \{p\}\}$. Consideramos $\hat{L} = \overline{\epsilon^{-1}(L \setminus \{p\})}$, para cada n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ que definen rectas sobre p se tienen puntos distintos sobre $\{p\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ y $\hat{L} = \epsilon^{-1}(L \setminus \{p\}) \cup (\{p\} \times [\alpha_1, \ldots, \alpha_n])$

Observación 0.1. El blow-up es un morfismo birracional. Lo expuesto en i) nos da un isomorfismo entre dos abiertos densos en las variedades respectivas.

Ahora vamos a tratar de replicar estas ideas de una forma local, para esto serán necesarias ciertas restricciones. Consideraremos X una variedad cuasiproyectiva y un punto $p \in X$ no singular. Sean $u_1, \ldots, u_n$ parámetros locales de p regulares en todo X tales que $u_1(x) = \ldots = u_n(x) = 0$ solo tiene solución para $x = p$ en X.

Definición 0.2. Sea X una variedad cuasiproyectiva con las condiciones del párrafo anterior, se define $Y \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}_{t_1,\ldots,t_n}$ como la variedad definida por las ecuaciones $u_i(x)t_j = u_j(x)t_i$ con $i, j \geq 1$. La variedad Y acompañada del morfismo restricción a la primera coordenada $\epsilon : Y \to X$ se le llama blow-up local de X en p.

Se van a respetar las propiedades que comentamos para el blow-up de $\mathbb{P}^n$.

Date: 12 de octubre de 2011.

i) $\epsilon : Y \setminus (\{p\} \times \mathbb{P}^{n-1}) \to X \setminus \{p\}$ es un isomorfismo. La inversa está dada por $\epsilon^{-1} : X \setminus \{p\} \to Y(\{p\} \times \mathbb{P}^{n-1})$ que manda $x \mapsto [x; [u_1(x), \dots, u_n(x)]]$

ii) Los puntos de $\epsilon^{-1}(p)$ son suaves en el blow-up.

Observación 0.2. Hay independencia de parámetros locales para la construcción del blow-up. Al elegir dos tuplas de parámetros locales de p que cumplen las condiciones impuestas, se obtendrán variedades isomorfas.

Teorema 0.1. *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad irreducible con $p \in X$ no singular. Sea $\epsilon : \Pi \to \mathbb{P}^n$ el blow-up de $\mathbb{P}^n$. Se tiene la descomposición $\epsilon^{-1}(X) = Y \cup (\{p\} \times \mathbb{P}^{N-1})$ en variedades irreducibles y la restricción de ϵ a Y define un morfismo con $\epsilon : \epsilon^{-1}(U) \to U$ el blow-up local de p para alguna vecindad U de p en X.*

Definición 0.3. La variedad Y que se obtiene del teorema anterior es lo que llamamos el **blow-up** de X en p junto con el morfismo birracional $\epsilon : Y \to X$.

No voy a entrar en detalles de la demostración del teorema, para mas referencias ver [2, p.18]. Como el blow-up de X en p está dado por un blow-up local, se tiene que $E := \epsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ cuando $n = dimX$. Es claro que hay un isomorfismo entre $Y \setminus E$ y $X \setminus \{p\}$. A E se le llama divisor **excepcional** del blow-up (cuando X es una variedad suave entonces Y también lo es, además $codimE = 1$ en Y). En el caso de una superficie se tiene $E \cong \mathbb{P}^1$. En lo que sigue del documento nos centraremos en el caso particular de superficies [1].

Definición 0.4. Sea S una supeficie lisa irreducible. Se define $\epsilon : \hat{S} \to S$ como el blow-up de S respecto al punto $p \in S$, también ocuparemos la notación $\hat{S} = Bl_p(S)$.

Sea C una curva en S por p. Llamamos a C' la transformada estricta de C que está dada por $C' = \overline{\epsilon^{-1}(C \setminus \{p\})}$. Ahora vamos a hacer un link con lo que hemos hecho en el seminario hasta el momento.

Teorema 0.2. *Sea C una curva en S y sea $r \geq 0$ la multiplicidad de p en C. Se tiene la igualdad $\epsilon^*(C) = \hat{C} + rE$ en $Pic(\hat{S})$.*

De partida $\epsilon^*(C) = N\hat{C} + ME$ para enteros N, M porque son las componentes irreducibles del pull-back, claramente $N = 1$ porque la forma de definir $\hat{C}$ es mediante un isomorfismo, solo falta entender que ocurre con M. La idea de la demostración es escribir $f = \varphi(x, y) + F(x, y)$ cuando φ es un polinomio homogeneo de grado r con coeficientes en $\mathbb{K}$ y F es otro polinomio homogeneo de grado $r + 1$ con coeficientes en $\mathcal{O}_p$ (donde x, y son parametros locales en p y las ecuaciones del blow-up estan dadas por $xT_1 = yT_0$). En el abierto dado por $T_0 \neq 0$ definiendo la nueva variable $s = T_1/T_0$, las ecuaciones del blow-up estan dadas por $\epsilon^* x = u$, $\epsilon^* y = us$. Ahora vemos que $\epsilon^* f = \epsilon^* \varphi(x, y) + \epsilon^* F(x, y) = u^r(\varphi(1, s) + u\epsilon^* F(1, s))$. Como la ecuación local de E en ese abierto es precisamente $u = 0$ se tiene lo pedido.

Ahora algunas aplicaciones a teoría de intersección.

Teorema 0.3. *Sea $D, D' \in Pic(S)$, se cumplen las siguientes propiedades:*

i) $D.D' = \epsilon^*(D).\epsilon^*(D')$

ii) $E.\epsilon^*(D) = 0$

iii) $E^2 = -1$

iv) $Pic(S) \oplus \mathbb{Z} \cong Pic(\hat{S})$, *donde el isomorfimo está dado por* $(D, n) \mapsto \epsilon^*(D) + nE$

Dem:

i) Existen $D_0, D_1 \in Pic(S)$ tal que $D_0 \sim D$, $D_1 \sim D'$ tal que $p \notin Supp(D_0) \cup Supp(D_1)$. Se sigue del isomorfismo entre $\hat{S} \setminus E \cong S \setminus \{p\}$ que $D_0.D_1 = \epsilon^*(D_0).\epsilon^*(D_1)$ y de esto la propiedad pedida.

ii) Igual que en i) se mueve el divisor para que quede disjunto a E.

iii) Sea C una curva que pasa por p con multiplicidad 1. Observar que $\hat{C}.E = 1$. Ocupando esto último, la propiedad ii) y del Teorema 0.2 se sigue que $0 = E.\epsilon^*(C) = E^2 + E.\hat{C} = E^2 + 1$, obteniendose $E^2 = -1$.

iv) Verificar que la función dada esta bien definida en $Pic(S)$ a $Pic(\hat{S})$ y es homomorfismo. Como cada curva en $\hat{S}$ es la transformada estricta de su imagen por ϵ, esto se generaliza para divisores en $Pic(S)$ (sobreyectividad). Supongamos ahora que $\epsilon^*(D) + nE = 0$, luego $-n = nE^2 = 0$. Si se tiene $\epsilon^*(D) = 0$ podemos mover el divisor para que $p \notin Supp(D)$ y por ende se tendrán isomorfismos entre los divisores primos que componen D, se sigue que $D = 0$ y por ende la función es inyectiva.

Observación 0.3. Sea $q \in E$, q tendrá como parametros locales en $\hat{S}$ a u y $s - s(q)$ (revisar que ocurre con los diferenciales). También es importante recordar que $u = 0$ es una ecuacion local de E. Esto se repite analogamente al otro abierto dado por $T_1 \neq 0$.

En la siguiente sesión se harán ejemplos y se seguirá presentando propiedades fundamentales para la geometría birracional que nos entrega el blow-up.

Referencias

1. A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
2. I. Shafarevich. *Basic algebraic geometry I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1977, 1994.