SSA SESIÓN 8: EXPLOSIÓN DE UN PUNTO 2 (BLOW-UP) (POR ANÍBAL VELOZO)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANÍBAL VELOZO

En la sesión anterior, construimos el blow-up de una variedad en un punto suave y luego nos centramos en el caso particular de superficies suaves, donde obtuvimos resultados por medio de teoría de intersección. Ahora nos centraremos en propiedades estructurales de funciones biracionales para superficies. En lo que sigue consideraremos S una superficie suave irreducible.

Teorema 0.1. *(Resolución de la indeterminación) Dada $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ una función racional, existen superficies suaves $X_m, X_{m-1}, ..., X_1, X_0 = S$ con morfimos $\epsilon_k : X_k \to X_{k-1}$ dados por el blow-up de un punto en X_{k-1}, $k \geq 1$, tales que $f \circ \epsilon_1 \circ ... \circ \epsilon_m : X_m \to \mathbb{P}^n$ es una función regular.*

Partiremos de un hecho conocido: la cantidad de puntos en una variedad suave donde una función racional no esta definida es de codimension ≥ 2.

Consideremos $\varphi = [f_0 : ... : f_n] : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Si $\mathrm{div}(f_i) = \sum_{j=1}^m k_{ij} C_j$, $k_{ij} \in \mathbb{Z}$, definimos $D = mcd(\mathrm{div}(f_1), ..., \mathrm{div}(f_n)) := \sum_{j=1}^m min_i(k_{ij}) C_j$. Sea $D_i := \mathrm{div}(f_i) - D$. Es útil tener presente el siguiente resultado.

Lema 0.1. *Sea $\varphi = [f_0 : ... : f_n] : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ una función racional. El conjunto de puntos donde φ no es regular está dado por $\cap_{i=1}^n Supp(D_i)$ (según la notación del párrafo anterior).*

De esto se sigue que la codimensión de este conjunto es ≥ 2 (los D_i's no tienen componentes comunes). Para una función racional definimos

$$g(\varphi) := D_i.D_j$$

(este número no depende de i, j porque todos son linealmente equivalentes). La idea de la demostración es probar que luego de un blow-up en un punto donde φ no es regular, este $g(\varphi)$ decrece y ahora ocupamos que este número es positivo (Notar que los D_i's son efectivos y linealmente equivalentes entre ellos, y que sus componentes intersectan nonegativamente a los otros D_j's ya que no debe estar en algún D_j), obteniendose que la indeterminación debe desaparecer. Se verán ejemplos concretos en lo que sigue de esta sesión.

Teorema 0.2. *(Propiedad fundamental del Blow-up) Dada $f : X \to S$ una función birracional regular entre superficies y un punto $p \in S$ donde f^{-1} no es regular, entonces*

Date: 13 de noviembre de 2011.

existe una función birracional regular $g : X \to \hat{S}$, donde $\hat{S}$ es el blow-up de S en p y $f = \epsilon \circ g$.

No voy a entrar en detalles de la demostración, solo mencionar que en la demostración queda claro que f se puede factorizar mediante un número finito de blow up's. De estos dos teoremas se tiene el siguiente corolario.

Corolario 0.1. *Dado $f : S \dashrightarrow S'$ una función birracional entre superficies suaves, existe una superficie suave X con funciones $p_S : X \to S$, $p_{S'} : X \to S'$ cada una composición de un número finito de blow ups tal que $p_{S'} = f \circ p_S$.*

Esto nos permite definir un orden en la clase birracional de S, este tema será tratado con mas calma en la próxima sesión del seminario. En lo que sigue revisaremos algunos ejemplos en que la utilización del blow up nos permite factorizar funciones racionales, pero primero retomaremos un ejemplo que dejamos pendiente en la sesión 2.

Ejemplo 0.1. Sea $F = ((x^2+y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0)$ y $G = ((x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0)$. Queremos calcular $(F.G)_{(0,0)}$ (trabajamos sobre $\mathbb{C}$). Hagamos el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en $(0,0)$. En la carta $t_0 \neq 0$ de $Bl_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)$ tenemos que las condiciones del blow-up se pueden escribir como $x = u$, $y = su$. La ecuación de la transformada estricta fuera de E (donde $u \neq 0$) se tiene $u(1+s^2)^2 + 3s - s^3 = 0$, ahora las intersecciones con $u = 0$ están dadas por $s \in \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, además la tangente es $u + 3s = 0$ (parte lineal en $u = s = 0$). Repitiendo esto en la misma carta para G se tiene la ecuación $u^2(1+s^2)^3 - 4s^2 = 0$ que para $u = 0$ se tiene que $s = 0$. Su parte de grado menor esta dado por $u^2 - 4s^2 = (u-2s)(u+2s)$. Se puede verificar que este punto de intersección de las transformadas estrictas es el único (hay que revisar la otra carta). Finalmente la multiplicidad de la intersección de las trasformadas en $(u,s) = (0,0)$ es 2 porque las rectas tangentes son todas distintas. Ahora ver que $\epsilon^*(F) = \hat{F} + 3E$, $\epsilon^*(G) = \hat{G} + 4E$, luego $\epsilon^*(F).\epsilon^*(G) = \hat{F}.\hat{G} - 12$. Como la multiplicidades de intersección se preservan fuera del punto $(0,0)$ y $(\hat{F}.\hat{G})_{(0,0)} = 2$ se tiene que $(E.F)_{(0,0)} = 14$. Así confirmamos un ejemplo dado ya hace tiempo.

Ejemplo 0.2. Consideremos la cuádrica $Q = (X_0X_3 - X_1X_2 = 0)$ en $\mathbb{P}^3$. Sea ϕ la proyección de $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ en $p = [0:0:0:1]$ dada por $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2]$ (esta aplicación envía cada recta por p a un punto en $\mathbb{P}^2$). Ahora la restricción $\phi : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ es birracional, y no es regular sólo en el punto p. Hacemos el blow-up en el punto p obteniendo $\epsilon : \hat{Q} \to Q$. Veamos en primer lugar que $\phi' = \phi \circ \epsilon : \hat{Q} \to \mathbb{P}^2$ es efectivamente una función regular. Explicitemos la construcción de este blow-up de manera loca. Tomemos el abierto $T_3 \neq 0$. Parametros locales de p en Q en este abierto son por ejemplo las funciones coordenadas T_1 y T_2. Ahora un punto $([X_0 : X_1 : X_2 : X_3], [t_0 : t_1]) \in \hat{Q}$ satisface las ecuaciones $t_0X_2 = t_1X_1$. Tomando un punto en que $t_0 \neq 0$, la ecuación del blow-up esta dada por $X_2 = hX_1$. Ahora podemos ver que $\phi'([X_0 : X_1 : X_2 : X_3], [t_0 : t_1]) = [X_0 : X_1 : X_2]$, bien definido si

$X_0 \neq 0$, si $X_0 = 0$ entonces $\phi'([X_0 : X_1 : X_2 : X_3], [t_0 : t_1]) = [0 : 1 : h]$. Análogo para cuando $t_1 \neq 0$, se sigue que ϕ' es regular en todo $\hat{Q}$. Como $\phi' : \hat{Q} \to \mathbb{P}^2$ es una función regular birracional se puede factorizar en una cadena de blow-ups. Veamos que $\phi^{-1}([X_0 : X_1 : X_2]) = [X_0^2 : X_0X_1 : X_0X_2 : X_1X_2]$, esta aplicación no está definido en $q = [0 : 1 : 0]$, $r = [0 : 0 : 1]$. Como el diagrama conmuta no puede tenerse a ϕ'^{-1} definida en q y r. El teorema nos dice que para factorizar ϕ se necesitarán explosiones en q y r, y vemos que la preimagen de q y r por ϕ' son exactamente dos curvas (-1) (i.e. $\mathbb{P}^1$ con autointersección (-1)).