SSA SESIÓN 9: SUPERFICIES MINIMALES Y EL CRITERIO DE CASTELNUOVO (POR RICARDO MENARES)

NOTAS ESCRITAS POR ROBERT AUFFARTH Y ANIBAL VELOZO

En esta sesión queremos estudiar la clase birracional de una superficie proyectiva suave S dada; es decir, queremos estudiar el conjunto

$$B(S) := \{S' : S' \text{ es una superficie proyectiva suave birracional a } S\}/\simeq,$$

donde $\simeq$ es la relación de isomorfismo. Para esto emplearemos la idea de *modelos minimales*.

Definición 0.1. Sean $S, S' \in B(S)$. Definimos un orden parcial $\geq$ donde $S \geq S'$ sí y solamente sí existe un morfismo birracional $\phi : S \to S'$.

Decimos que $S' \in B(S)$ es *minimal* si lo es con respecto al orden parcial $\geq$.

Ejemplo 0.1. Consideremos la inmersión de Segre $H : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$; la imagen de H es una cuádrica Q dada por la ecuación $xw - yz = 0$, donde $[x : y : z : w]$ son las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^3$. Consideremos las rectas $L_u = H(\{u\} \times \mathbb{P}^1)$ y $L_v = H(\mathbb{P}^1 \times \{v\})$. Vemos que si $u \neq u'$ entonces $L_u \cap L_{u'} = \varnothing$, y similarmente con los v. Sea $q \in Q$ y sea $m : Q \to \mathbb{P}^2$ tal que un punto p es enviado a la recta que une p y q. Entonces podemos ver esta aplicación racional como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \hat{Q} \arrow[dl, "\epsilon"'] \arrow[dr, "\tilde{m}"] & \\ Q \arrow[rr, dashed, "m"'] & & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{m}$ es una explosión en dos puntos con divisores excepcionales L_u y L_v tales que $L_u \cap L_v = \{q\}$.

Se tiene que Q y $\mathbb{P}^2$ son minimales pero no isomorfos. Esto muestra también que $B(\mathbb{P}^2)$ no tiene elemento mínimo (aunque las superficies descritas son minimales).

Definición 0.2. Decimos que una curva $E \subset S$ es excepcional si existe una explosión en un punto $\epsilon : S \to S'$ con S' suave tal que E es el divisor excepcional de ϵ.

En este caso, observamos que condiciones necesarias para que E sea excepcional es que $E^2 = -1$ y $E \simeq \mathbb{P}^1$. El criterio de Castelnuovo dice que estas condiciones son suficientes también.

Date: 26 de octubre de 2011.

Antes de demostrar el criterio de Castelnuovo, veremos un corolario importante.

Proposición 0.1. *Dada una superficie S, existe una superficie minimal S_0 y un morfismo birracional $S \to S_0$.*

Demostración Si S es minimal, estamos listos. Si no, entonces existe un morfismo birracional $\epsilon_1 : S \to S_1$ tal que ϵ_1^{-1} no es regular. En particular, existe una curva excepcional en S. Si S_1 no es minimal, seguimos. Así obtenemos una sucesión

$$S \xrightarrow{\epsilon_1} S_1 \xrightarrow{\epsilon_2} \cdots \xrightarrow{\epsilon_n} S_n$$

donde los ϵ_i son explosiones en un punto con divisor excepcional E'_i. Afirmamos que n es acotado.

Demostración 1: Cada ϵ_i disminuye en 1 el rango de Pic$S$, y este grupo tiene rango finito. Por lo tanto, el proceso debe parar.

Demostración 2: Sea E_i la transformada total de E'; es decir, si $\sigma_i = \epsilon_i \circ \epsilon_{i-1} \circ \cdots \circ \epsilon_1$, entonces $E_i := \sigma_i^*(E'_{i-1})$. Observamos que $E_i.E_j = 0$ si $i \neq j$, y $E_i^2 = (E'_i)^2 = -1$. Recordemos que Pic$S \simeq H^1(S, \mathcal{O}_S^*)$. Definimos la aplicación dlog : $\mathcal{O}_S^* \to \Omega_S^1$ tal que $f \mapsto df/f$; esta aplicación induce un homomorfismo dlog : $H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \to H^1(S, \Omega_S^1)$, y luego tenemos una función $c : \text{Pic}S \to H^1(S, \Omega_S^1)$. Por la Dualidad de Serre, existe una forma bilineal no degenerada

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(S, \Omega_S^1) \times H^1(S, \Omega_S^1) \to \mathbb{K}$$

tal que $\langle c(D), c(D') \rangle = D.D'$ para todo $D, D' \in \text{Pic}S$. Si ponemos $e_i = c(E_i)$, vemos que $\langle e_i, e_j \rangle = -\delta_{ij}$; como $\dim H^1(S, \Omega_S^1) < \infty$ obtenemos que $n \leq \dim H^1(S, \Omega_S^1)$. $\square$

La proposición anterior nos dice que siempre existe un elemento minimal en la clase birracional de una superficie. La pregunta natural es ¿Cuándo es tal elemento minimal único? Es decir, ¿cuándo existe un elemento mínimo en la clase birracional? Lo siguiente es un teorema clásico el cual demostraremos más adelante.

Teorema 0.1. *Existe un elemento mínimo en $B(S)$ (o sea un único elemento minimal) sí y solamente sí S no es birracional a $C \times \mathbb{P}^1$ para alguna curva C.*

El estudio de superficies birracionales a $C \times \mathbb{P}^1$ (superficies regladas) se hará en más adelante. Ahora enunciaremos y probaremos el criterio de Castelnuovo:

Teorema 0.2. *(Criterio de Castelnuovo) Una curva $E \subset S$ es la curva excepcional de alguna explosión en un punto sí y solamente sí $E^2 = -1$ y $E \simeq \mathbb{P}^1$.*

Demostración Sea H un hiperplano que corta a S tal que $\mathcal{O}_S(H)$ está generado por sus secciones globales. Si $s_0, \ldots, s_N \in \Gamma(\mathcal{O}_S(H))$, entonces inducen una aplicación $S \to \mathbb{P}^N$ tal que $p \mapsto [s_0(p) : \cdots : s_N(p)]$.

Por un teorema de Serre, podemos suponer que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$ (consideramos una inmersión de Veronese de alto grado y luego aplicamos Serre). Sea entonces $k = H.E$ y $H' = H_S + kE$ para $H_S = H.S$ (donde E es la curva que cumple $E^2 = -1$ y $E \simeq \mathbb{P}^1$).

Observamos que $\mathcal{O}_S(D)|_E \simeq \mathcal{O}_E(D.E) = \mathcal{O}_E(\deg_E(D.E))$; este es el haz torcido de Serre (esto es sólo un nombre, el haz es lo que es). Por lo tanto, $\mathcal{O}_S(H)|_E = \mathcal{O}_E(k)$, $\mathcal{O}_S(E)|_E = \mathcal{O}_E(-1)$ y $\mathcal{O}_S(H')|_E \simeq \mathcal{O}_E$.

Para todo $i \leq k$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_S(H_S + (i-1)E) \to \mathcal{O}_S(H_S + iE) \xrightarrow{r_i} \mathcal{O}_E(k-i) \to 0$$

donde r_i es la restricción a E. Esta sucesión induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(S, \mathcal{O}_S(H_S + (i-1)E)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S(H_S + iE)) \xrightarrow{r_i} H^0(S, \mathcal{O}_E(k-i)) \\ &\to H^1(S, \mathcal{O}_S(H_S + (i-1)E)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(H_S + iE)) \xrightarrow{r_i} H^1(S, \mathcal{O}_E(k-i)) \cdots \end{aligned}$$

Por inducción y nuestra hipótesis $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$, se puede demostrar fácilmente que r_i es sobreyectivo. Tomemos ahora una base $s_0, \ldots, s_N$ de $H^0(S, \mathcal{O}_S(H_S))$. Obtenemos entonces que $\dim H^0(E, \mathcal{O}_E(k-i)) = k - i + 1$.

Para todo $i \leq k$, tomemos secciones $a_{i,0}, a_{i,1}, \ldots, a_{i,k-i} \in H^0(S, \mathcal{O}_S(H + iE))$ tales que sus restricciones sean una base de $H^0(E, \mathcal{O}_E(k-i))$. Sea también $s \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S(E))$ tal que el divisor de ceros de s (comúnmente denotado por $(s)_0$) es igual a E. Entonces

$$\{s^k s_0, \ldots, s^k s_N, s^{k-1} a_{1,0}, \ldots, s^{k-1} a_{1,k-1}, \ldots, s a_{k-1,1}, a_{k,0}\}$$

es una base de $H^0(S, \mathcal{O}_S(H'))$. Si ponemos $M = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(H'))$ (que es mayor que N), obtenemos una aplicación racional $\phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^M$.

Notamos que no hay ceros comunes entre las coordenadas que definen a ϕ. Esto implica que ϕ es un morfismo. Denotamos por S' la imagen de ϕ; queremos probar que S es la explosión en un punto de S' a través de ϕ.