SESIÓN DE GEOMETRÍA: LXXXII SOMACHI, 2013

Coordinador: Giancarlo Urzúa (PUC)

Contents

e-mail: urzua@mat.puc.cl.

1. Curvas elipticas en variedades abelianas

Robert Auffarth (PUC)

Sea (A, Θ) una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión n definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. E. Kani [21] probó que la existencia de curvas elípticas en una *superficie* abeliana polarizada depende del comportamiento de una cierta forma cuadrática positiva definida $q_{(A,\Theta)} : \mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}[\Theta] \to \mathbb{Z}$, donde $\mathrm{NS}(A)$ es el grupo de Néron-Severi de A. Más concretamente, para $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, Kani demostró que hay una biyección entre los subgrupos elípticos $E \subseteq A$ tales que $(\Theta \cdot E) = d$ y los elementos primitivos $\alpha \in \mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}[\Theta]$ tales que $q_{(A,\Theta)}(\alpha) = d^2$.

Generalizaremos esta idea a dimensión arbitraria, y mostraremos que las curvas elípticas en A dependen del comportamiento de $n-1$ polinomios homogéneos en $\mathrm{NS}(A)/\mathbb{Z}[\Theta]$. Veremos además que estas formas homogéneas pueden entregar información geométrica acerca de la variedad. Para $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $n = 3$, mostraremos ecuaciones que debe satisfacer una matriz período de A para que A contenga una curva elíptica E con $(\Theta \cdot E) = d$.

2. Symmetric group actions on Jacobian varieties

Angel Carocca (UFRO), Rubí E. Rodríguez (PUC), Anita M. Rojas (UChile)

A Jacobian variety which is isogenous to a product of elliptic curves is called a completely decomposable Jacobian. Completely decomposable Jacobians have been widely studied but there still remain some key questions unsolved; see for instance [8] and [30].

In this work we study and completely characterize the families of curves with the action of a symmetric group, such that the so called group algebra decomposition for the corresponding Jacobian becomes a product of elliptic curves.

3. Fields of definition of cyclic p-gonal Riemann surfaces

Rubén A. Hidalgo (UTFSM)

A cyclic p-gonal Riemann surface, where p is a prime integer, is a closed Riemann surface S of genus $g \geq 2$ admitting a conformal automorphism φ of order p so that $S/\langle\varphi\rangle$ has genus zero. In this case, we say that φ is a p-gonal automorphism and that $\langle\varphi\rangle$ is a p-gonal group of S.

If we choose a branched cover $\pi : S \to \widehat{\mathbb{C}}$, with $\langle\varphi\rangle$ as its deck group, whose branch values are $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$, then there exist integers $n_1, ..., n_m \in \{1, ..., p-1\}$ with $n_1 + \cdots + n_m = 0 \mod p$ so that S can be defined by the

p-gonal curve

$$E: \quad y^p = F(x) = \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{n_j}, \tag{1}$$

so that $\varphi(x,y) = (x, \omega_p y)\rangle$, where $\omega_p = e^{2\pi i/p}$. In case that we aloud some of the values equals to ∞, say $a_m = \infty$, then in the above algebraic description we should delete the factor $(x - a_m)^{n_m}$ and the congruence relation should be $n_1 + \cdots + n_{m-1} \neq 0 \mod p$.

We say that S is *cyclically p-gonally defined over a subfield k_0 of $\mathbb{C}$* if in (1) we may choose the branch values a_j so that $F(x) \in k_0[x]$.

In this talk I will present the following.

Theorem 1. Let S be a cyclic p-gonal Riemann surface of genus $g \geq 2$, definable over a subfield k of $\mathbb{C}$, and let φ be a p-gonal automorphism of S. Then

(1) S is cyclically p-gonally definable over an extension of degree at most $2(p-1)$ of k.
(2) If both S and φ are simultaneously defined over k, then S is cyclically p-gonally definable over an extension of degree at most 2 of k.
(3) If, in equation (1) we have that $n_1 = \cdots = n_m = n$, then S is cyclically p-gonally definable over an extension of degree at most 2 of k.

The above theorem, in the case $p = 2$ (i.e., hyperelliptic Riemann surfaces) states the following.

Corollary 1. Every hyperelliptic Riemann surface which definable over a subfield k of $\mathbb{C}$ is hyperelliptically definable over an extension of degree at most 2 of k.

We should note that Corollary 1 was already known for even genus by Mestre (in fact he proved that in this case the curve can be hyperelliptically defined over k) and in odd genus if the reduced group is non-trivial (Lercier, Ritzenthaler and Sijslingr). Corollary 1 completes these results to the case when the reduced group of automorphisms is trivial in the odd genus case.

4. Cuerpos de Moduli de Curvas Generalizadas de Fermat de tipo (k,3)

Rubén A. Hidalgo (UTFSM), Pilar Johnson (UTFSM)

En general, tanto el cálculo del cuerpo de moduli de una curva algebraica y la determinación de si este es o no un cuerpo de definición es un problema difícil de llevar a cabo. En esta charla vamos a considerar una familia de curvas no hiperelípticas que tienen un comportamiento similar a las curvas elípticas e hiperelípticas. Estas curvas son llamadas *curvas generalizadas de*

Fermat de tipo $(k,3)$; definidas como aquellas curvas algebraicas proyectivas irreducibles no singulares que admiten la acción del grupo abeliano $\mathbb{Z}_k^3$ como un grupo de automorfismos, de manera que el cuociente de la curva por la acción de este grupo es un orbifold de género 0 con exactamente 4 puntos cónicos, cada uno de orden k. Veremos un teorema en relación a estas curvas y su cuerpo de moduli, y un modelo explícito para encontrar la curva isomorfa. Los resultados mostrados forman parte de la tésis de magister de la segunda autora.

5. Sobre el núcleo de la descomposición isógena de una variedad Jacobiana

Leslie Jiménez (UChile)

Dada una acción de un grupo finito G en una superficie de Riemann compacta X, podemos obtener una representación simpléctica de esta acción; por ejemplo, usando el método propuesto en [2]. Por otro lado, debido a [25] obtenemos una descomposición isógena ν de la variedad jacobiana JX de X respecto a dicha acción. Digamos,

$$\nu : \Pi_{1,j}B_{1j} \times ... \times \Pi_{r,j}B_{rj} \sim JX,$$

donde r es el número de $\mathbb{Q}$-representaciones irreducibles W_i de G, y $j \in \{1,..,n_i\}$ donde n_i=dimV_i/m_i, V_i es la $\mathbb{C}$-representación irreducible asociada a W_i y m_i su índice de Schur.

Además, debido a [4] conocemos una descripción de los factores en ν respecto de los subgrupos del grupo G.

En esta charla describiremos el reticulado de cada factor por medio de la representación simpléctica de la acción de G en X. Además calcularemos el núcleo de ν. Esto lo haremos definiendo una matriz L como la unión vertical de la matrices coordenadas de los reticulados de cada factor en ν. El módulo del determinante de L será el orden de tal núcleo.

Esto nos permite obtener también las polarizaciones de estos factores del mismo modo que en [24] para factores isotípicos.

Mostraremos los cálculos del orden del núcleo de ν obtenidos para curvas 3-gonales no normales -listadas en [37]- y curvas 3-gonales normales con grupo reducido A_4, S_4 y A_5 de género $g < 10$. En estos casos determinamos los factores de tal forma de obtener el mínimo núcleo posible. Mostraremos además las polarizaciones de los factores en ν para estos casos.

6. Computing Cox rings

Antonio Laface (UConce)

Let X be a normal projective variety with finitely generated class group. The *Cox ring* [1] of X is the $\mathrm{Cl}(X)$-graded algebra

$$\mathcal{R}(X) = \bigoplus_{\mathrm{Cl}(X)} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)).$$

It is well-known, after the work of D. Cox [5] and Y. Hu - S. Keel [19], that $\mathcal{R}(X)$ is a polynomial ring if and only if X is a toric variety, but in general $\mathcal{R}(X)$ is not even a finitely generated algebra. In this talk I will discuss algorithmic approaches to determine a presentation for the Cox ring of X. In particular I will focus on the following problem: given a birational morphism $\pi : X \to Y$, relate $\mathcal{R}(X)$ with $\mathcal{R}(Y)$.

This is joint work with J. Hausen and S. Keicher [15].

7. Determinando equivalencia Topológica de acciones de Grupos en Superficies de Riemann

Camila Muñoz S. (UChile)

Mediante el uso de la información entregada por el vector generador asociado a la acción de un grupo G sobre una Superficie de Riemann S, es posible clasificar topológicamente dichas acciones de manera algebraica [3]. Mostraremos las condiciones que deben satisfacer los vectores generadores de forma que determinen acciones topológicamente equivalentes [?]. Usando que en ciertos casos equivalencia topológica y analítica coinciden [12] se reobtienen resultados para familias de ejemplos [31], [34].

8. Curvas de Tipo Fermat

Jaime Pinto (UChile)

Sea n un entero positivo mayor o igual a 4. Una curva de tipo Fermat de grado n es una superficie de Riemann compacta con acción de un grupo finito G de orden n^2 de modo que tal acción tenga signatura $(0; n, n, n)$. Las curvas de Fermat clásicas son ejemplos concretos de este tipo de superficies de Riemann. En esta charla se mostrarán algunas propiedades de estas curvas, comparandolas con las curvas clásicas de Fermat, ademas de ejemplos concretos de realizaciones de estas superficies como curvas algebraicas, aplicando métodos relacionados con curvas n-gonales.

9. Invariantes diedrales de curvas hiperelípticas
Saúl Quispe (UConce)

Sea X una curva hiperelíptica de género $g \geq 2$ definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero con grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(X)$. Denotamos por $\overline{\mathrm{Aut}}(X) := \mathrm{Aut}(\mathrm{X})/\langle\iota\rangle$ el *grupo de automorfismos reducido* de X, donde ι es la involución hiperelíptica de X. Si existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{X})$ tal que $\bar{\sigma} \in \overline{\mathrm{Aut}}(X)$ es una involución, entonces X es isomorfa a una curva dada por la ecuación $y^2 = f(x^2)$ o $y^2 = xf(x^2)$, con

$$f(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + 1,$$

donde $d = g+1$ o g. Los *invariantes diedrales* de (X, σ), introducidos por J. Gutierrez y T. Shaska en [13], son

$$u_i := a_1^{d-i} a_i + a_{d-1}^{d-i} a_{d-i}, \qquad 1 \leq i \leq d-1.$$

En esta charla mostraremos que, si el grupo de automorfismos reducido de la curva contiene un elemento de orden dos y es distinto del grupo de Klein, entonces existe un elemento $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{X})$ tal que los invariantes diedrales de (X, σ) generan el cuerpo de móduli de la curva. Este es un trabajo en desarrollo con Michela Artebani.

10. Nuevas singularidades en superficies estables simplemente conexas con $p_g = 0$
Arié Stern (PUC)

En analogía con la compactificación del espacio de móduli de curvas de género $g \geq 2$, Kollár y Shepherd-Barron [22] definieron una compactificación del espacio de móduli de superficies algebraicas de tipo general con invariantes topológicos K^2 y χ fijos; éstas son las llamadas superficies estables. De estos espacios de móduli se sabe muy poco y sólo para algunos valores específicos de K^2 y χ.

Nos interesa estudiar este espacio con los invariantes más pequeños posibles, es decir, con $K^2 = 1$ y $\chi = 1$. Alrededor de 1980, Barlow encontró una familia de superficies de tipo general simplemente conexas con $K^2 = 1$ y $p_g = 0$ (luego $\chi = 1$) y esta era la única familia de superficies con tales características conocida hasta que en el año 2007 Lee y Park [26] desarrollaron un método con el cual pudieron encontrar nuevas superficies de tipo general simplemente conexas con estos invariantes. Más aún, el método también permitió encontrar superficies de tipo general con $\pi_1 = 1$,$p_g = 0$ y $K^2 = 2, 3, 4$ concluyendo de esta manera que los espacios de móduli correspondientes son no vacíos. En esta charla se explicará en que consiste el método de Lee y Park y se mostrarán algunas nuevas superficies estables simplemente conexas con $p_g = 0$ y $K^2 = 1, 2, 3$ construidas usando este método.

11. Ample vector bundles with sections vanishing on varieties of special type

Andrea Luigi Tironi (UConce)

Let X be a smooth complex projective variety of dimension $n \geq 5$. Let $\mathcal{E}$ be an ample vector bundle of rank $r \geq 2$ on X such that there exists a global section $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ whose zero locus $Z := (s)_0 \subset X$ is a smooth subvariety of dimension $n-r$. If H is an ample line bundle on X and $H_Z := H|_Z$, then we give a description of triplets $(X, \mathcal{E}, H)$ as above under the assumption that $K_Z + (\dim Z - 3)H_Z$ is not nef for $\dim Z = n - r \geq 3$.

12. Acerca del producto fibrado de diseños de niños y su cuerpo fuerte de moduli

Angélica Vega (UTFSM)

Dado un diseño de niños o equivalentemente una pareja (X, D) con X una superficie topológica orientada y compacta y D un grafo finito, conexo y bicoloreado en X tal que $X \backslash D$ es una unión finita de discos topológicos, es posible definir una función no constante y continua $\beta : X \to \hat{\mathbb{C}}$ y dotar a X de estructura compleja de modo que dicha función sea además un holomorfismo entre superficies de Riemann con a lo más 3 valores de ramificación y viceversa. En otras palabras, a cada diseño de niños se le puede asociar el par de Belyi (X, β) y viceversa.

Debido a esta equivalencia se puede definir del producto fibrado de dos diseños de niños (X_1, D_1) y (X_2, D_2) como el espacio

$$X_1 \times_{(\beta_1, \beta_2)} X_2 := \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 | \beta_1(x_1) = \beta_2(x_2)\} \subseteq X_1 \times X_2$$

donde (X_1, β_1) y (X_2, β_2) son los pares de Belyi asociados a (X_1, D_1) y (X_2, D_2) respectivamente. Dicho producto fibrado resulta ser conexo [11] pero desafortunadamente puede o no ser irreducible y singular motivo por el cual no siempre resulta nuevamente un diseño de niños.

En esta charla se discutirán los conceptos anteriormente mencionados y se presentarán ejemplos que ilustren la situación. Para el caso en que el producto fibrado de diseños de niños sea un diseño de niños, se discutirán los conceptos de cuerpo de moduli y cuerpo fuerte de moduli del producto fibrado y además se dará una caracterización para este último en términos de los cuerpos de moduli de los diseños de niños originales.

References

[1] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface, *Cox rings*, in preparation. Link: http://goo.gl/GCbJee.

[2] A. Behn, R. E. Rodríguez, A.M. Rojas, *Adapted Hyperbolic Poligons and Symplectic Representations for group actions on Riemann surfaces.* J. Pure Appl. Alg. **217** (2013), 409–426.

[3] S. A. Broughton, Classifying finite group actions on surfaces of low genus. *Journal of Pure and Applied Algebra* 69 (1990), 233-270.

[4] A. Carocca, and R. E. Rodríguez, *Jacobians with group actions and rational idempotents.* J. Algebra **306** (2006), no. 2, 322–343.

[5] D. A. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. 4 (1995), no. 1, 17–50.

[6] C.J. Earle. On the moduli of closed Riemann surfaces with symmetries. *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (1971), 119–130. Ed. L.V. Ahlfors et al. (Princeton Univ. Press, Princeton).

[7] C.J. Earle. Diffeomorphisms and automorphisms of compact hyperbolic 2-orbifolds. Geometry of Riemann surfaces, 139–155, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **368**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[8] T. Ekedahl and J.-P. Serre, *Exemples de courbes algébriques à jacobienne complètement décomposable*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 317(5):509–513, 1993.

[9] Y. Fuertes. Fields of moduli and definition of hyperelliptic curves of odd genus. *Arch. Math.* **95** (2010), 15–18.

[10] Y. Fuertes and G. González-Diez. Fields of moduli and definition of hyperelliptic covers. *Arch. Math.* **86** (2006), 398–408.

[11] W. Fulton, J. Hansen, *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings*, Annals of Math, 110, 159–166, 1979.

[12] G. González-Diez On prime Galois coverings of the Riemann sphere. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* CLXVIII (IV), 1-15 (1995).

[13] J. Gutierrez and T. Shaska, *Hyperelliptic curves with extra involutions*, *LMS J. Comput. Math.* **8** (2005), 102–115.

[14] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Berlin, 1977.

[15] J. Hausen, S. Keicher, A. Laface, *Computing Cox rings*, http://arxiv.org/pdf/1305.4343.pdf, arXiv:1305.4343.

[16] R.A. Hidalgo and M. Leyton. On uniqueness of automorphisms groups of Riemann surfaces. *Revista Matematica Iberoamericana* **23**, No. 3 (2007), 793–810.

[17] Rubén. Hidalgo, *The fiber product of Riemann surfaces: a Kleinian group point of view*, Annal. Math.Phys, 1:37–45, 2011.

[18] R.A. Hidalgo. Fields of definition of cyclic p-gonal Riemann surfaces. Preprint.

[19] Y. Hu, S. Keel, *Mori dream spaces and GIT*, Michigan Math. J. 48 (2000), 331–348.

[20] B. Huggins. Fields of Moduli and Fields of Definition of Curves. Ph.D. Thesis, UCLA, 2005.

[21] E. Kani, *Elliptic curves on abelian surfaces*, Manuscripta Mathematica 84, p. 199-223, 1994.

[22] J. Kollár and N. I. Shepherd-Barron. *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. math. 91, 299–338 (1988).

[23] A. Kontogeorgis. Field of moduli versus field of definition for cyclic covers of the projective line. *J. de Theorie des Nombres de Bordeaux* **21** (2009) 679–692.

[24] H. Lange and A.M. Rojas, *Polarizations of isotypical components of Jacobians with group action.* Arch. der Math. **98** (2012), 513-526.

[25] H. Lange and S. Recillas, *Abelian varieties with group actions.* Journ. Reine Angew. Mathematik, **575** (2004) 135 - 155.

[26] Y. Lee and J. Park. *A simply connected surface of general type with* $p_g = 0$ *and* $K^2 = 2$, Invent. Math. 170, 483–505 (2007).

[27] R. Lercier and C. Ritzenthaler. Hyperelliptic curves and their invariants: geometric, arithmetic and algorithmic aspects. *J. Algebra* **372** (2012), 595–636.

[28] R. Lercier, C. Ritzenthaler and J. Sijsling. Explicit Galois obstruction and descent for hyperelliptic curves with tamely cyclic reduced auomorphism group. http://arxiv.org/pdf/1301.0695v1.pdf

[29] J-F. Mestre. Construction de courbes de genre 2 à partir de leurs modules. (French) [Constructing genus-2 curves from their moduli] Effective methods in algebraic geometry (Castiglioncello, 1990), 313–334, *Progr. Math.* **94**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.
[30] B. Moonen and F. Oort, *The Torelli locus and special subvarieties*, Handbook of Moduli, 2:549–594, 2011.
[31] G. Riera, R. E. Rodríguez, Riemann surfaces and abelian varieties with an automorphism of prime order. *Duke Mathematical Journal* 69, No. 1 (1993), 199 - 217.
[32] G. Shimura. On the field of rationality for an abelian variety. *Nagoya Math. J.* **45** (1972), 167–178.
[33] Andrea L. Tironi, *Nefness of adjoint bundles for ample vector bundles of corank* 3, Math. Nachr. **286** (2013), n. 14-15, 1548–1570.
[34] G. Urzúa, Riemann surfaces of genus g with an automorphism of order p prime and $p > g$. *Manuscripta Mathematica* 121, 169-189 (2006).
[35] I. Vainsencher and J.F. Voloch. On the Castelnuovo-Severi inequality. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* **390** (1988), 114–116.
[36] A. Weil. The field of definition of a variety. *Amer. J. Math.* **78** (1956), 509–524.
[37] A. Wootton, *The full automorphism group of a cyclic $p-$gonal surface.* J. of Alg. **312** (2007) ,377–396.
[38] A. Wooton, *Defining equations for cyclic prime covers of the Riemann Sphere*, Israel Journal of Mathematics 157 (2007) ,103-122.