- Charla: Introducción Fibrados de Ulrich.

  - Vector bundles Ulrich

  - Motivación • Def • propiedades

  - Existencia • Algunos resultados en Sup.

$\rightsquigarrow$ Dado un $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo $\deg(F) = d$, ¿$\exists$ $(L_{ij})_{i,j}$ matriz de formas lineales tq $F = \det(L_{ij})$?

Def: $X \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie suave,

X es determinantal si $X = \{\det(L_{ij})\}$ (L_{ij}) matriz de Formas lineales.

¿Cuando $X \subseteq \mathbb{P}^n$ hip. suave es determinantal?

Ejemplo: • $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$, $\deg(F) = 3$ suave.

- Schröter 1863, X determinantal.

- Si $X = \{\det(L_{ij}) = 0\}$, X es singular en todos los $x \in X$ tq $rk(L_{ij})$ decae en al menos 2. $\mathrm{cod}(\text{lugar Sing}) \leq 3$.
  - Si $\dim(X) \geq 3 \Rightarrow X$ no suave.

- Pregunta más débil.

  $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, $\deg(X) = d$, X suave.

  y $r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

  ¿$\exists (L_{ij})$ tq $\det(L_{ij}) = F^r$?

- $d = 2$, $Q = \{x_1^2 + \dots + x_n^2\}$

  Q determinantal dependiendo de n y r.

  [r múltiplo de $2^{[\frac{n-3}{2}]}$].

Prop: $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, $\deg(X) = d$. / **Beauville**
Suave, $r \in \mathbb{Z}^{>0}$. LSCSE:

① $\exists$ (l_{ij}) matriz de formas lineales de tamaño $rd \times rd$ tq $F^r = \det(l_{ij})$

② $\exists$ Vector bundle E sobre X y una sucesión

$$\boxed{0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus rd} \xrightarrow[L]{} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus rd} \longrightarrow \boxed{E} \to 0}$$

$f_*(E)$

$X \xrightarrow{f} \mathbb{P}^N$

<u>idea:</u> ① → ②

$(l_{ij}) \rightsquigarrow L : \mathcal{O}(-1)^{\oplus rd} \to \mathcal{O}^{\oplus rd}$

- Se debe probar que el cokernel, E, es V.b sobre X.

② → ① $L \rightsquigarrow (l_{ij})$

$\det(l_{ij})$ se anula en X.

$F^t = \det(l_{ij}) \Rightarrow t = r$

$\deg(F) = d$.

- Sea $X^n \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad suave $/\mathbb{C}$

  H un divisor amplio en X.

  $\mathcal{O}_X(H) = \mathcal{O}_X(1)$, $d := H^n = \deg(X) \geq 1$.

- $m \in \mathbb{Z}$, $E \in \mathrm{Coh}(X)$

$$E(mH) := E \otimes \mathcal{O}_X(mH)$$

- __Teo:__ (03, Eisenbud-Scheyer-Weyman)
- Dado E vb de rango $r \geq 1$ sobre X^n: LASE

① E admite una resolución lineal

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-N+n)^{\oplus a_{N-n}} \to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{\oplus a_1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}^{\oplus a_0} \to E \to 0$$

$\boxed{a_0 = r\deg(X)}$, $a_i = \binom{N-n}{i} a_0$.

② $H^i(X, E(-jH)) = 0, \ \forall\, i \geq 0$
$\forall\, j \in \{1, \dots, n\}$

③ $H^i(X, E(-iH)) = 0, \quad \forall\, i > 0$ &
$H^j(X, E(-(j+1)H)) = 0, \ \forall\, j < n.$

④ para toda proyección lineal finita $\pi : X \to \mathbb{P}^n$, se tiene que
$$\pi_*(E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus t}, \ \exists\, t \geq 1.$$

<u>Def:</u> Un vb en X con rango r se dice de Ulrich si cumple alguna de las 4 condiciones anteriores.

- E ulrich $(X, \mathcal{O}_X(H))$.

Propiedades: E vb ulrich sobre X resp. a H amplio

$\operatorname{ran}(E) = r$.

① E acM, i.e., $H^i(X, E(j H)) = 0$ $\forall j \in \mathbb{Z}$ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$

$h^0(X, E) = r \deg(X)$

②

$Y \in |H|$, general suave.

$E|_Y$ ulrich en Y resp a $H|_Y$.

③ E es Semi-estable respe. a H.

$\forall F \leq E$, F no trivial $\Rightarrow$

$$\mu_H(F) \leq \mu_H(E)$$

$$\mu_H(F) = \frac{c_1(F) \cdot H^{n-1}}{rk(F)} \in \mathbb{Q}$$

④ $E = \bigoplus E_i \Rightarrow E$ ulrch

sii E_i lo és.

⑤ $(X, \mathcal{O}_X(H))$ y $(Y, \mathcal{O}_Y(H'))$

E ulrch ↑ $\qquad$ F ulrch ↑

$$E \boxtimes F(n) := p_1^*(E) \otimes p_2^*(F)(n)$$

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $E \boxtimes F(n)$ ulrch en $X \times Y$

respecto a $\mathcal{O}_X(H) \boxtimes \mathcal{O}_Y(H')$

- $H^i(X \times Y, (E \boxtimes F(n))(-p))$

$$= \bigoplus_{k+l=i} H^l(X, E(-p)) \otimes H^k(Y, F(n-p))$$

$0 \qquad 1 \leq p \leq n \qquad n-1 \leq p \leq n + \dim Y$

(6)

$$\begin{array}{ccc} E \text{ v.b} & & L \text{ amplio} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\text{finito}]{\pi} & Y \end{array}$$

$\Rightarrow$

E ulrich en X para $\pi^* L$

sii $\pi_*(E)$ ulrich para (Y, L).

- Existencia de Fibrados de Ulrich.

<u>prop:</u> $Q \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ cuadrica suave.

$\Rightarrow$ $\exists$ exactamente $\begin{cases} 1, & n \text{ impar} \\ 2, & n \text{ par} \end{cases}$

V.b Ulrich irreducible en Q de rango $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$.

En particular,

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)^r = \det(l_{ij})$$

sii r multiplo de $2^{\left[\frac{n-3}{2}\right]}$.

<u>Teo:</u> (1991, Herzog - Ulrich - Backelin)

Toda intersección completa $X \subseteq \mathbb{P}^N$ admite un v.b Ulrich.

<u>Prop:</u> $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ admite un vb Ulrich de rango

$n!$

Idea:

$$\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\pi} \mathrm{Sym}^n(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}^n$$

tomamos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y

$$\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$$

Sea $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1) \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(nd-1)$

por (5) L ulrich en el producto $\Rightarrow \pi_* L$ ulrich en $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$.

· Coro: $X^n \subseteq \mathbb{P}^N$ suave, sea E ulrich rango $r \Rightarrow \forall d \geq 1$ $(X, \mathcal{O}_X(d))$ admite un

Ub Ulrich con $r \cdot n!$.

- Tomar $\pi : X \xrightarrow[\text{finita}]{} \mathbb{P}^n$

  F Ulrich $rk(F) = n!$

  $\underline{E \otimes \pi^* F}$ Ulrich. //

- Fibrados lineales Ulrich son raros.

① $X \subset \mathbb{P}^N$, $\deg(X) = d > 1$

y $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X(1)$

$\Rightarrow$ X NO admite fibrados <u>lineales</u> Ulrich.

② $S \subset \mathbb{P}^N$. Sup. del Pe330

L Fibrado lineal en S

tq $L^2 = -2$ y $L \cdot K_S = 0$

$\Rightarrow$ $L(1)$ ulrich en S.

$L = \mathcal{O}_S(\ell - \ell')$, ℓ, ℓ' lineal

$\ell \cap \ell' = \phi$.

(3) $X \xrightarrow{p} B$, B curva

tq Fibras son $\mathbb{P}^n$, Scroll

$\Rightarrow$ Si $M \in \mathrm{Pic}(B)$

$H^i(B, M) = 0$, $i = 0, 1$

$\Rightarrow$ $p^* M \otimes \mathcal{O}_X(1)$ ulrich.

- Conj.: Toda variedad admite un v.b ulrich.