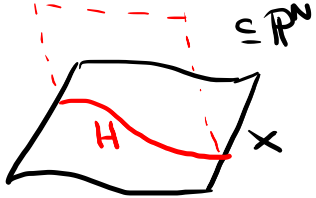
SGA 2021-2 (Semana 6): "Fibrados de Ulrich en superficies de tipo general" / $\mathbb{C}$

(luego de Beauville, Casnati, Faenzi, Felice Lopez, ...)

§1. Recuerdos



Sea $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ var. proy. suave de $\dim(X) = n$ y H sección hiperplana (i.e., $\mathcal{O}_X(H) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X$ muy amplio).

Notación: $E \to X$ fibr. vectorial y $m \in \mathbb{Z}$, entonces $E(m) := E \otimes \mathcal{O}_X(mH)$

Def: Un fibrado vectorial $E \to X$ de $\operatorname{rg} E = r \geq 1$ es de Ulrich (resp. a H) si:

$$H^i(X, E(-i)) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$
$$H^j(X, E(-(j+1))) = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$$

$\leftarrow$ $2\dim(X)$ condiciones

Vimos algunas propiedades útiles: Sea $E \to X$ fibr. de Ulrich, entonces

① $h^0(X, E(-1)) = 0$ y $h^0(X, E) = \operatorname{rg}(E) \deg(X)$ $\leftarrow$ $\deg(X) \overset{\text{def}}{=} H^n$

② E es aCM, ie, $H^i(X, E(-j)) = 0$ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $\forall j \in \mathbb{Z}$!

③ Dualidad de Serre:

$\mathcal{O}_X(K_X) = \det(\Omega^1_X)$

E Ulrich $\iff E^{ul} := E^\vee \otimes \mathcal{O}_X(K_X + (n+1)H)$ Ulrich

④ [Beauville 2000] Si $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ hipersup. suave

i) $\exists\, E \to X$ Ulrich de $rg(E) = r \iff f^r = \det(L_{ij}(x))$

ii) $\boxed{\exists\, E \to X \text{ Ulrich de } rg(E) = 2 \text{ tal que } \det(E) \simeq \mathcal{O}_X(K_X + (n+1)H) \text{ (ie, } E \cong E^{ul})}$ $\iff f = Pf(L_{ij}(x))$

$$\det\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & \lambda_r \\ -\lambda_r & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = (\lambda_1 \cdots \lambda_r)^2$$

$\rightsquigarrow Pf = \lambda_1 \cdots \lambda_r$

$\rightsquigarrow$ "Ulrich especial"

⑤ E es semi-estable resp. a H $\rightsquigarrow$ será importante hoy !

<u>Ejemplo</u> (Eisenbud-Schreyer-Weyman): Sea $C \subseteq \mathbb{P}^N$ curva y $E \simeq \mathcal{O}_C(D)$ $\overbrace{\text{fibrado en rectas}}^{\text{line bundle}}$

$\Rightarrow \mathcal{O}_C(D)$ Ulrich resp. a $\mathcal{O}_C(H)$ ssi: $h^0(C, \mathcal{O}_C(D-H)) = h^1(C, \mathcal{O}_C(D-H)) = 0$

$\left(\overset{RR}{\Rightarrow} \chi(\mathcal{O}_C(D-H)) = 0 = \deg(D-H) - g + 1\right)$

$\Rightarrow$ Si D divisor <u>general</u> (ie, tq $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(D-H) \notin \Theta \subseteq \mathrm{Pic}^{g-1}(C)$), $\mathcal{O}_C(D)$ Ulrich

$\rightsquigarrow$ "Toda curva plana $C \subseteq \mathbb{P}^2$ es determinantal" [Dixon 1902]

No-Ejemplo: $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^3$ superficie de grado $d \geq 4$ **general** $\xRightarrow{\text{Noether-Lefschetz}}$ $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}\,\mathcal{O}_X(1)$

Si $E \cong \mathcal{O}_X(m)$ Ulrich resp. a $\mathcal{O}_X(1)$:

$$h^0(E(-1)) \overset{\text{def}}{=} h^0(\underbrace{\mathcal{O}_X(m-1)}_{m-1<0}) = 0 \quad \text{y} \quad h^0(E) \overset{\text{def}}{\underset{E\simeq\mathcal{O}_X}{=}} h^0(\underbrace{\mathcal{O}_X(m)}_{m\geq 0}) = d \cdot \underbrace{\mathrm{rg}(E)}_{=1} = d$$

$\Rightarrow m = 0$, i.e., $E \cong \mathcal{O}_X$ y luego $d = h^0(E) \overset{1}{=} 1$ $\lightning$

§2. Superficies

En todo lo que sigue de la charla, $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ superficie suave proy de grado $d := H^2 \geq 1$.

Recuerdo: Si $E \to X$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r \geq 1$ entonces

eg. $c_1(E) = [D]$ con $\det(E) \simeq \mathcal{O}_X(D)$

$$= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i h^i(X,E)$$

$$\chi(E) \underset{\text{HRR}}{=} r\,\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\left(c_1(E)^2 - c_1(E)\cdot K_X\right) - c_2(E) \quad \text{con} \quad c_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{R})$$

$\rightsquigarrow c_2(E) \in \mathbb{Z}$

donde $\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}\left(c_1(X)^2 + e(X)\right)$ con $c_1(X)^2 = K_X^2$ y $c_2(X) = e(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{4}(-1)^i b_i(X)$

Casnati (2017): Usando Hirzebruch - Riemann - Roch y la propiedad aCM prueba:
$E \to X$ fibrado de rango r en $X \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(H)) \simeq \mathbb{P}^N$ es Ulrich

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a)\ H^0(X, E(-1)) = H^2(X, E(-2)) = 0 \\ b)\ c_1(E)\cdot H = \frac{r}{2}(K_X + 3H)\cdot H \\ c)\ c_2(E) = \frac{1}{2}\left(c_1^2(E) - c_1(E)K_X\right) - r\left(H^2 - \chi(\mathcal{O}_X)\right) \end{array} \right\}$$

$\Leftarrow$ "caracterización numérica"

Consecuencia: Sea $E \to X$ fibrado de $rg(E) = 2$. Entonces,
E Ulrich especial $\Longleftrightarrow h^0(E(-1)) = 0$, $\det(E) \simeq \mathcal{O}_X(K_X + 3H)$
y $c_2(E) = \frac{1}{2}(3K_X\cdot H + 5H^2) + 2\chi(\mathcal{O}_X)$.

Obs (Beauville "Complex Surfaces" Prop III.18): Sea $E \to X$ de $rg(E) = 2$ tal que $\exists L, M \in \mathrm{Pic}(X)$
con $0 \to L \to E \to M \to 0$ exacta
$\Rightarrow c_2(E) = L\cdot M \overset{RR}{=} \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(E) + \chi(\det(E)) \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo: $E \simeq \mathcal{O}_X(D)$ de rg 1 es Ulrich $\iff$ $\begin{cases} a)\ h^0(D-H) = h^0(K_X+2H-D) = 0 \\ b)\ 2D\cdot H = 3H^2 + K_X\cdot H \\ c)\ D^2 = 2(H^2 - \chi(\mathcal{O}_X)) + K_X\cdot D \end{cases}$

eg. $X = \mathbb{P}^2$ y $\mathcal{O}_X(H) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$ con $d \geq 1$ muy amplio, si $E \simeq \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$

a) $\iff h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-d)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2d-m-3)) = 0 \iff$ $m < d$ y $m > 2d-3$

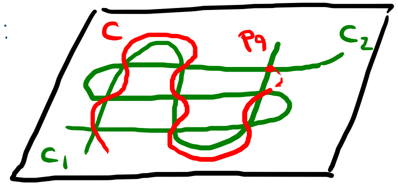
eg. $d = 1 \Rightarrow m = 0$ ✓ eg. $d = 2$ (superficie de Veronese) ↯ ($\rightsquigarrow T_{\mathbb{P}^2}$ funciona !)

§3. Construyendo fibrados de Ulrich

Def: Un $\underbrace{\text{subesquema de dim } 0}_{\to \text{ puntos con multiplicidad}}$ (localmente intersección completa) $Z \subseteq X$ es Cayley-Bacharach (CB) resp. a $\mathcal{O}_X(D)$ si:

$$\text{“}\forall\, C \in |D|,\quad C \supseteq Z \setminus \{pt\} \Longrightarrow C \supseteq Z\text{”}$$

Ejemplo emblemático [Fulton "Alg. Curves" § 5.6 Prop 3 (pág 63)]:



Sean $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ cúbicas tq $Z = C_1 \cap C_2 = \{p_1, \dots, p_9\}$

Si $C \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|$ es otra cúbica tq $p_1, \dots, p_8 \in C \Rightarrow p_9 \in C$.

Similar: Si $C_1 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$ y $C_2 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(e)|$ tq $Z = C_1 \cap C_2 = \{p_1, \dots, p_{de}\}$

$\Rightarrow Z$ es CB respecto a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d+e-3)$.

Teorema (Correspondencia de Hartshorne-Serre): Sea X superficie proy suave, $Z \subseteq X$ subesquema de dim 0 l.i.c. Entonces:

① $\exists\, E \to X$ fibrado de $\mathrm{rg}\, E = 2$ tq $c_1(E) = D$ y tq $\exists\, s \in H^0(E)$ con $V(s) = Z$

$\Updownarrow$

② Z es CB resp. a $\mathcal{O}_X(K_X + D)$ (i.e., $\forall\, C \in |K_X + D| : C \supseteq Z \setminus \{pt\} \Rightarrow C \supseteq Z$)

Más aún, en tal caso

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot s} E \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0 \quad \text{es exacta}$$

[Huybrechts-Lehn "The geom. of moduli spaces of sheaves" Thm 5.1.1]

Veamos esto en acción:

Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ superficie suave y $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$ sección hiperplana general ($\xRightarrow{\text{Bertini}}$ suave)

$$\Rightarrow 0 \to \mathcal{O}_X(-H) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_H \to 0 \quad \underset{\otimes \mathcal{O}_X(H)}{\rightsquigarrow} \quad 0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(H) \to \mathcal{O}_X(H)|_H \to 0$$

$$\text{Como } h^2(\mathcal{O}_X(H)|_H) \overset{\dim H = 1}{=} 0, \text{ si } h^2(\mathcal{O}_X) = p_g(X) = 0 \overset{\text{cohom.}}{\Longrightarrow} 0 = h^2(X,H) \overset{\text{Serre}}{=} h^0(X, K_X - H)$$

Si además suponemos:

i) $h^1(\mathcal{O}_X) = q(X) = 0$

ii) $h^1(X,H) = 0$ (i.e., "H no es especial")

$$\Rightarrow N+1 \overset{\text{dg}}{=} h^0(X,H) = \chi(X,H) \overset{\text{RR}}{=} \frac{1}{2}(H^2 - K_X \cdot H) + \chi(\mathcal{O}_X) \overset{p_g = q = 0}{=} \frac{1}{2}(H^2 - K_X \cdot H) + 1$$

⚠ Si $Z \subseteq X$ son $N+2$ pts generales $\Rightarrow Z$ es CB resp. a $\mathcal{O}_X(H)$

(pues "$\underbrace{H_0}_{\text{sección hiperplana}} \supseteq \underbrace{Z \setminus \{pt\}}_{N+1 \text{ pts grales en } X \subseteq \mathbb{P}^N} \Rightarrow H_0 \supseteq Z$" es "Falso $\Rightarrow$ Falso" $\rightsquigarrow$ Verdadero)

$K_X + D = H$, i.e., $\boxed{D = H - K_X}$

$$\underset{\substack{\text{Hartshorne}\\ \text{Serre}}}{\Longrightarrow} \exists\, E_0 \to X \text{ de rg } 2 \text{ tq } c_2(E) = N+2 \text{ y } 0 \to \mathcal{O}_X \to E_0 \to \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{I}_Z \to 0$$

Teorema (Casnati 2017): Sea (X,H) superficie proy suave tq $p_g = q = h^1(X,H) = 0$
$\Rightarrow \exists\, E \to X$ Ulrich especial.

Dem: $\det(E_0) \simeq \mathcal{O}_X(H-K_X) \neq \mathcal{O}_X(K_X+3H) \xrightarrow[\det(E\otimes L) = \det(E)\otimes L^{\otimes 2}]{} E := E_0 \otimes \mathcal{O}_X(K_X+H)$ funciona ∎

Consecuencia: $\exists$ Ulrich especial en $X \simeq \mathbb{P}^2$, $\mathbb{F}_m \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$, Enriques ✓

Obs: Beauville (2016) usa esta técnica para el caso $X \simeq \mathbb{C}^2/\Lambda$, $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^4$ sup. abeliana.

⚠ Hay superficies interesantes con $q=0$ y $p_g \geq 1$ (eg. superficies K3 !)
Faenzi (2019): "Hay que permitir haces no-localmente libres" (cf. Casnati, Felice Lopez)

"divisor no especial"

Idea: Sup. $X \subseteq \mathbb{P}^N$ superficie suave con $q(X) = 0$, $p_g(X) \geq 1$, $h^1(X,H) = 0$
y además (★) $h^0(X, \underbrace{2K_X - H}_{\simeq \mathcal{O}_X(-K_X)}) = 0$ ← automático para sup. K3

$p_g(X) \overset{\text{def}}{=} h^0(X,K_X) \geq 1 \Rightarrow K_X \sim E \geq 0 \rightsquigarrow 0 \to \mathcal{O}_X(-E) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_E \to 0 \quad /\otimes \mathcal{O}_X(2K_X-H)$

$\Rightarrow h^2(X,H) \overset{\text{Serre}}{=} h^0(X, K_X - H) \leq h^0(X, 2K_X - H) \overset{(★)}{=} 0$

$$\Rightarrow N+1 \overset{\text{def}}{=} h^0(X,H) \overset{h^1(H)=0}{\underset{+(\star)}{=}} \chi(X,H) \overset{RR}{=} \frac{1}{2}(H^2 - K_X\cdot H) + 1 + p_g(X)$$

Si seguimos la receta anterior: $\exists\ \tilde{E}$ de rg 2 con $h^2(\tilde{E}(-1)) = h^0(\tilde{E}(-2)) = h^1(\tilde{E}(-1)) = 0$ ✓

y con $c_2(\tilde{E}) = (\text{"Casnati"}) - p_g(X)$ y $h^0(\tilde{E}(-1)) = p_g(X)$

Faenzi: $h^0(\tilde{E}(-1)) \geq 1 \Rightarrow \exists\ \varphi : \tilde{E}(-1) \to \mathbb{C}_{x_0}$ rascacielos! no-nulo $\rightsquigarrow 0 \to E_\varphi \to \tilde{E}(-1) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_{x_0} \to 0$ haz

Aquí, $c_1(E_\varphi) = c_1(\tilde{E}) = K_X + 3H$ ✓

$c_2(E_\varphi) = c_2(\tilde{E}) + 1$

$h^0(E_\varphi(-1)) = h^0(\tilde{E}(-1)) - 1$ si φ general

Teoría de Deformación (Mukai '84, Artamkin '91): Si $h^0(X, 2K_X - H) = 0$ $(\star)$ y además

$H^2 + 4 \geq K_X\cdot H$ ($\leftarrow$ automático para sup. K3) $\Rightarrow$ Podemos deformar E_φ en $M = M_{c_1,c_2}$ a un fibrado vectorial $\tilde{E}_\varphi =: E_1$

Repetimos el proceso $p_g(X)$ veces y obtenemos:

Teorema (Faenzi 2019, Casnati 2021): Sea (X,H) superficie con $p_g(X) \geq 1$, $H^2 + 4 \geq K_X\cdot H$ y con $q(X) = h^1(X,H) = h^0(X, 2K_X - H) = 0$.

$\Rightarrow \exists\ E \to X$ fibrado de Ulrich especial.

Ejemplos:

1) Superficies K3 (Faenzi 2019).

2) X sup. de tipo general (ie, $h^0(X, mK_X) \sim m^2$) con $q(X)=0$.

Si X minimal (ie, $\nexists\ \mathbb{P}^1 \simeq C \subseteq X$ con $C^2=-1$), $h^1(X, mK_X)=0 \quad \forall m \geq 1$ ✓

Si además K_X es amplio y consideramos $H := mK_X$ con $m \geq 3$

$\Rightarrow H^2+4 > K_X \cdot H$ y $h^0(X, 2K_X - H) = 0$ ✓ $\rightsquigarrow \exists\ E \longrightarrow X$ Ulrich especial.

⚠ La existencia no ha sido probada si $m \leq 2$ ó si K_X no es amplio.

Más casos conocidos para superficies de tipo general:

1. [Casnati 2019]: $p_g(X) = h^1(X,H) = 0$ y $q(X)=1$.
2. [A.F. Lopez 2019]: $h^1(X,H)=0$, $\chi(\mathcal{O}_X)=1$ y dim de Albanese maximal (ie, $alb(X)$ superficie)
3. [Casnati 2020]: $\deg(X) \leq 8$.
4. [A.F. Lopez 2021]: si $h^1(X,H) = h^2(X,H) = 0$, y además:
   - i) $q(X) \geq 2$ y $X \longrightarrow X_{min}$ cumple $\mathrm{Pic}(X_{min}) \simeq \mathbb{Z}$; ó bien
   - ii) $q(X) \leq 1$ y dim de Albanese maximal

§4. Candidatos a Contra-Ejemplos [Beauville, Beijing 2017]

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ superficie suave con $\rho_X \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rg} \operatorname{Pic}(X) = 1$ y sea $E \to X$ fibrado de Ulrich de $\operatorname{rg} E = r$. Entonces

$$\deg(X) \geq \sigma(X) \qquad \text{con } \sigma(X) := \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2) = K_X^2 - 8\chi(\mathcal{O}_X)$$

Dem:

Sabemos que $c_1(E)\cdot H = \frac{r}{2}(K_X + 3H)\cdot H \overset{\rho_X = 1}{\Longrightarrow} c_1(E) = \frac{r}{2}(K_X+3H)$ en $NS(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Además, $c_2(E) = 1/2\,(c_1^2(E) - c_1(E)\cdot K_X) - r^2(H^2 - \chi(\mathcal{O}_X))$

$$\Rightarrow \Delta_E := 2r\, c_2(E) - (r-1)\, c_1^2(E) = (\dots) = \frac{r^2}{4}(H^2 - K_X^2 + 8\chi(\mathcal{O}_X)) \overset{\text{def}}{=} \frac{r^2}{4}(\deg(X) - \sigma(X))$$

E Ulrich $\Rightarrow E$ semi-estable $\overset{\text{Bogomolov}}{\Longrightarrow} \Delta_E \geq 0$, ie, $\deg(X) \geq \sigma(X)$ ■

Pregunta: ¿$\exists$ superficie $X \subseteq \mathbb{P}^N$ con $\rho_X = 1$ (eg. $b_2(X) = 1$) y $\deg(X) < \sigma(X)$?

Beauville: "$\exists$ varias sup. con $\sigma(X) > 0$ pero tienen $\rho_X \geq 2$, con la excepción de las superficies de Blasius-Rogawski (con $K_X^2 = 9\chi(\mathcal{O}_X)$). ¿$\exists$ X con $\rho_X = 1$ y $\frac{K_X^2}{\chi(\mathcal{O}_X)} \in]8,9[$?"