Superficies de Todorov: Contraejemplo de Torelli

§1. Estructuras de Hodge y el problema de Torelli

Una estructura de Hodge (pura de peso k) es un par $(H, \mathcal{F}^\bullet)$ donde H es un $\mathbb{Q}$-e.v. y $\mathcal{F}^\bullet$ es una filtración de Hodge en $H_{\mathbb{C}} := H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, i.e.

tal que

$$\boxed{\begin{gathered} H_{\mathbb{C}} = \mathcal{F}^0 \supseteq \mathcal{F}^1 \supseteq \mathcal{F}^2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}^k \supseteq \mathcal{F}^{k+1} = \{0\} \\ \mathcal{F}^p \oplus \overline{\mathcal{F}^q} = H_{\mathbb{C}} \qquad \forall\, p+q = k+1. \end{gathered}} \quad (*)$$

Esta condición $(*)$ es equivalente a que $H_{\mathbb{C}}$ admita una descomposición de Hodge

$$H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \quad , \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

La equivalencia está dada por $\underline{\mathcal{F}^p = H^{p,q} \oplus H^{p+1,q-1} \oplus \dots \oplus H^{k,0}}$.

Decimos que una estructura de Hodge $(H, \mathcal{F}^\bullet)$ es polarizada si dotamos a H de un producto bilineal $\underline{\langle \cdot , \cdot \rangle}$ cumpliendo las relaciones bilineales de Hodge-Riemann

I. $\mathcal{F}^p = (\mathcal{F}^{k+1-p})^\perp$.

II. $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} i^{p-q} \langle \alpha, \bar{\alpha} \rangle > 0 \ , \ \forall\, \alpha \in \mathcal{F}^p \cap \overline{\mathcal{F}^q} = H^{p,q}$.

Ejemplo: Nosotros trabajaremos sólo con estructuras de Hodge polarizadas de peso 2 (superficies), luego queremos

$$\boxed{F^2 = H^{2,0} \subseteq F^1 = H^{1,1} \oplus H^{2,0} \subseteq F^0 = H^{0,2} \oplus H^{1,1} \oplus H^{2,0} = H_{\mathbb{C}}}$$

con $\langle \cdot , \cdot \rangle$ en H tal que:

a) $H^{2,0} = \overline{H^{0,2}}$

b) $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ y $\langle \alpha, \bar{\alpha} \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in H^{2,0}$

c) $\langle \alpha, \bar{\alpha} \rangle < 0 \quad \forall \alpha \in H^{1,1}$

d) $H^{1,1} = (H^{2,0} \oplus H^{0,2})^{\perp}$

Esto se tendrá siempre que tomemos S una superficie proyectiva lisa, $H := H^2(S, \mathbb{Q})_{prim}$ y $\langle \cdot , \cdot \rangle$ el producto usual en cohomología. (Teorema del índice de Hodge)

Obs: Recuerde que $H^2(S,\mathbb{Q})_{prim} = (\mathbb{Q} \cdot \underline{[L \cap S]})^{\perp}$

donde $L \cap S$ es la sección hiperplana de S, luego

$$H^2(S,\mathbb{Q}) = \underline{H^2(S,\mathbb{Q})_{prim}} \oplus \underline{\mathbb{Q}[L \cap S]}$$

$$H^2(S,\mathbb{C}) = H^{0,2} \oplus (H^{1,1}_{prim} \oplus \mathbb{C}[L \cap S]) \oplus H^{2,0}$$

$$= \underbrace{\left(\underline{H^{0,2}} \oplus \underline{H^{2,0}} \oplus \mathbb{C}\cdot[L \cap S]\right)}_{\langle \alpha, \bar{\alpha}\rangle > 0} \oplus \underbrace{H^{1,1}_{prim}}_{\langle \alpha, \bar{\alpha}\rangle < 0}$$

En conclusión $\langle \cdot , \cdot \rangle$ en $H^2(S, \mathbb{Q})$ tiene firma

$$(2p_g + 1,\ h^{1,1} - 1), \quad h^{2,0} = p_g = \dim H^0(\Omega^2_S)$$

mientras que en $H^2(S,\mathbb{Q})_{prim}$ tiene firma

$$\boxed{(2p_g,\ h^{1,1} - 1)}$$

Definición: Dado un $\mathbb{Q}$-e.v. $\underline{(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)}$ y números de Hodge $\underline{h^{p,q}}$ t.q.

$$\underline{\dim H = \sum_{p+q=k} h^{p,q}} \quad \text{y} \quad \underline{h^{p,q} = h^{q,p}}$$

el espacio que parametriza todas las estructuras de Hodge polarizadas en H con

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q} = h^{p,q}$$

es el dominio de periodos de H.

Ejemplo: Si S es una superficie, el dominio de periodos de $H^2(S,\mathbb{Q})_{prim}$

corresponde a

$$D = \underbrace{SO(2p_g,\ h^{1,1} - 1)}_{\mathrm{Aut}(H^2_{prim}, \langle \cdot,\cdot \rangle)} \Big/ \underbrace{SO(2p_g) \times SO(h^{1,1} - 1)}_{\text{Aut que fijan la desc. de Hodge}}$$

Definición: Dada una familia $\underline{X \to T}$ proyectiva suave con base conexa el mapa periodo

$$\mathcal{P} : T \longrightarrow D$$

asigna a cada $t \in T$ la estructura de Hodge polarizada de $\underline{H^k(X_t, \mathbb{Q})_{prim}}$.

Problema de Torelli: ¿Cuándo

$$\mathcal{P}(t_1) = \mathcal{P}(t_2) \Rightarrow X_{t_1} \simeq X_{t_2} \ ?$$

+ Curvas (Torelli)
+ variedades abelianas (trivial)
+ Hipersuperficies genéricas (Donagi)
+ Superficies K3 y otros de tipo K3: cubic 4-folds, Hyperkähler (Verbitsky)

Obs: Recordemos que S es sup. K3 si $\underline{K_S \equiv 0}$ y $\underline{\pi_1(S) = \{1\}}$.

$\Leftrightarrow$ S minimal, $\boxed{p_g = 1,\ q = 0}$

Luego $\chi(\mathcal{O}_S) = p_g - q + 1 = 2$ y

Noether: $\underbrace{\chi_{top}(S)}_{2 - 2b_1 + b_2} = 12 \cdot \chi(\mathcal{O}_S) - K^2 = 24$

$\Rightarrow \underbrace{b_2}_{2 + h^{1,1}} = 22 \Rightarrow h^{1,1} = 20$

$\Rightarrow \boxed{h^{1,1}_{prim} = 19}$

Luego el dominio periodo de las superficies K3 es

$$\underbrace{D}_{\boxed{\dim_{\mathbb{C}} 19}} = \underbrace{SO(2,19)}_{\substack{\dim \frac{21\cdot 20}{2} \\ 210}} \Big/ \underbrace{SO(2)\times SO(19)}_{\substack{\dim \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{19\cdot 18}{2} \\ 1+171 \\ 172}}$$

$\dim_{\mathbb{C}} 19 = \dim \mathcal{M}$

moduli K3 alg.

$$\boxed{\mathcal{M} \xrightarrow[\sim]{P} D}$$

§2. Superficies de Todorov

Vamos a construir superficies de tipo general con

$$p_g = 1,\ q = 0 \ \text{ y } \ 2 \leq K^2 \leq 8 .$$

Partimos J sup. abeliana, $J = \mathbb{C}^2/\Lambda$

$$i : J \to J \qquad \text{invol.}$$
$$x \mapsto -x \qquad \text{fija 16 pts.}$$

$$\rightsquigarrow X := J/i \overset{\deg 4}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^3$$ sup. de Kummer

tiene 16 nodos

Blow-up 16 pts $\longrightarrow \hat{X}$ sup. K3

16 div. marcados $E_1, \ldots, E_{16}$

$$E_i^2 = -2$$

$$H^2(\hat{X}, \mathbb{C})_{prim} = (\underbrace{H^{2,0}}_{1} \oplus \underbrace{H^{0,2}}_{1}) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{16} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fijo}}}{\mathbb{C}} \cdot [E_i] \oplus \underbrace{\tilde{H}}_{3}\Big)$$

Lema: Hay 6 puntos singulares de la superficie de Kummer $X \subseteq \mathbb{P}^3$

en posición general (i.e. no hay 4 coplanares). Los llamaremos

$$p_1, \dots, p_6 \in X,$$

luego sus correspondientes divisores excepcionales en $\hat{X}$ son

$$E_1, \dots, E_6 .$$

Definición: Para cada $0 \leq i \leq 6$ considere una cuádrica $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ t.q.

$$p_1, p_2, \dots, p_i \in Q \quad , \quad p_{i+1}, \dots, p_{16} \notin Q$$

$$\text{y } Q \cap X \text{ sólo tiene sing. nodales en } p_1, \dots, p_i .$$

Sea C_i la transf. estricta de $Q \cap X$ en $\hat{X}$, luego tomamos

$$\hat{Y} \xrightarrow{f} \hat{X}$$

rec. ram. $2:1$ con div. de ram. $C_i + E_{i+1} + \dots + E_{16}$, entonces

$$f^* C_i = 2 \cdot C_i' \quad , \quad f^* E_j = 2 \cdot E_j' \quad , \quad j = i+1, \dots, 16$$

$$\Rightarrow \quad 4 E_j'^2 = (f^* E_j)^2 = 2 \cdot E_j^2 = -4$$

$$\Rightarrow \quad E_j'^2 = -1$$

La superficie de Todorov Y va a ser el modelo minimal de $\hat{Y}$, se obtiene de $\hat{Y}$ luego de contraer $E_{i+1}', \dots, E_{16}'$.

Obs: Si

$$p : \hat{X} \longrightarrow X \quad \text{es el blow-up}$$

$$\Rightarrow \quad p^*(Q \cap X) = C_i + E_1 + E_2 + \dots + E_i = 2 p^*(H)$$

donde H sec. hip.

$$\Rightarrow C_i = 2p^*H - (E_1+\dots+E_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_i^2 = 4p^*H^2 + E_1^2+\dots+E_i^2 = 16-2i.}$$

Por otro lado como $\hat{X}$ es minimal (es K3) tenemos

$$\begin{tikzcd} \hat{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \hat{X} \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

donde g es 2:1 y ramifica en C_i'. Por Hurwitz

$$\boxed{K_Y = g^*K_{\hat{X}} + C_i' = C_i'}$$

$\Rightarrow Y$ es de tipo general

$$K_Y^2 = C_i'^2 = \frac{1}{4}(g^*C_i)^2 = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot C_i^2 = \frac{1}{2}(16-2i) = 8-i$$

$$2 \le K_Y^2 \le 8.$$

Usando adjunción, Noether, etc..

$$\chi_{top}(Y) = 16+i$$

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = 2$$

$$p_g = 1,\ q = 0 \ \dots$$

Obs: Además no es difícil probar que $C_i \subseteq \hat{X}$ no es hiperelíptica.

También por construcción $Y \longrightarrow \hat{X}$ admite una involución j t.q.

$$\hat{X} = Y/j \quad \text{y} \quad j|_{C_i} = id.$$

Teorema: Sea Y una sup. minimal de tipo general con:

1) $p_g = 1$, $q = 0$, $2 \leq K^2 \leq 8$
2) K_Y no singular no hiperelíptico y amplio
3) $j : Y \to Y$ involución con $j|_{K_Y} = id$.

Entonces, el sistema lineal $|2K_Y|$ da un mapa holomorfo 2:1

$$Y \xrightarrow{f} \mathbb{P}^{K_Y^2+1}$$

con $f(Y) = X$ una superficie K3 con $K_Y^2 + 8$ sing. nodales.

Decimos que Y es una superficie de Todorov asociada a X

Prop 1: Sean Y_1, Y_2 dos sup. de Todorov asociadas a las sup. K3 X_1 y X_2 respectivamente. Si $X_1 \not\cong X_2 \Rightarrow Y_1 \not\cong Y_2$.

Dem:

Prop 2: Si Y_1, Y_2 son sup. de Todorov asociadas a la misma sup. K3 X con divisores de ramificación no equivalentes. Entonces $Y_1 \not\cong Y_2$.

$\Theta^{\xi} \cap X$

Dem:

Lema: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ es K3 con sing. nodales, entonces el moduli de secciones hiperplanas no isomorfas es un abierto de $(\mathbb{P}^N)^*$.

§3. Falla de Torelli

Teorema: Si Y_1, Y_2 son dos superficies de Todorov asociadas a la misma superficie K3 $\underline{X}$, entonces

$$\underline{\mathcal{P}(Y_1)} = \underline{\mathcal{P}(Y_2)}$$

es decir, tienen la misma estructura de Hodge polarizada.

Dem: Spg podemos suponer $\underline{Y_1}$ cercano a $\underline{Y_2}$ en el moduli de sup. de Todorov asoc. a $\underline{X}$. Luego $\underline{Y_1 \simeq Y_2}$ topológicamente. Este difeomorfismo puede ser tomado respetando las involuciones

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[loop left] \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[loop right] \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$ respete involuciones

De este modo vemos que es suficiente mostrar que:

[**Lema:** Si Y es sup. de Tod. as. X, entonces la estr. de Hodge de Y está det. por la de $\underline{X}$ y por la involución $\underline{i}$ t.q. $X = Y/i$.]

Dem: $\underline{i}$ induce involución en $\underline{H^2(Y,\mathbb{Q})}_{prim}$, luego

$$H^2(Y,\mathbb{C})_{prim} = H^+ \oplus H^-$$

$$H^+ = \{\alpha : i^*\alpha = \alpha\}$$

$$H^- = \{\alpha : i^*\alpha = -\alpha\}$$

$\alpha \in H^+ \perp \underset{\beta\in}{H^-}$ respecto $\langle \cdot , \cdot \rangle$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle i^*\alpha, i^*\beta \rangle = \langle \alpha, -\beta \rangle = -\langle \alpha, \beta \rangle = 0$$

Por otro lado $H^{2,0}(Y) = \mathbb{C}\cdot\omega^{2,0}$ y $i|_{K_Y} = id$

$$i^*\omega^{2,0} = \omega^{2,0}$$

$$\Rightarrow H^{2,0} \subseteq H^+ \Rightarrow H^{0,2} \subseteq H^+$$

$$\Rightarrow H^+ = H^{2,0} \oplus H^{0,2} \oplus (H^{1,1})^+$$

$$\text{y } H^- = (H^{1,1})^-$$

esto me dice que la estr. Hodge de Y está determinada por H^+

Y por otro lado

$$H^+ = p^*(\underline{H^2(X,\mathbb{C})_{prim}})$$

$$p : Y \to \underline{X} = Y/i. \quad \blacksquare$$

$$SO(2,19)/SO(2)\times SO(19)$$

Cor: El moduli de las sup de Todorov con $K^2 = 8-i$ corresponde a

$$U \times \left(\Gamma \backslash SO(2,3+i) / SO(2) \times SO(3+i) \right)$$

donde $U \subseteq \mathbb{P}^{9-i}$ es abierto, mientras que su imagen bajo el mapa periodo es el moduli de las sup. K3 asociadas

$$\Gamma \backslash SO(2,3+i) / SO(2) \times SO(3+i)$$

para Γ un grupo discreto.

Idea: La sup. de Todorov fué construida fijando $16-i$ div. excepcionales $E_{i+1}, \dots, E_{16}$ en $\hat{X}$, luego su estr. de Hodge es de la forma

$$H^2(\hat{X}, \mathbb{C})_{prim} = \underbrace{\left(H^{2,0} \oplus H^{0,2} \right)}_{\dim 2} \oplus \left(\underbrace{\bigoplus_{j=i+1}^{16} \mathbb{C} \cdot [E_j]}_{\text{fijo no genera moduli}} \oplus \underbrace{\tilde{H}}_{\dim 3+i} \right)$$

$\blacksquare$