SGA

Variedades con Picard Max

12/10/21

Artículo base: Arnaud Beauville

«Some surfaces with maximal Picard number»
Journal de l'École polytechnique Mathématiques 2014.

X = variedad proyectiva nosingular $|_{\mathbb{C}}$

$\mathrm{Div}(X)$ = Grupo libre abeliano generado por las subvariedades de codim 1.

$\cup$

$\mathrm{Pdiv}(X)$ = subgrupo de los divisores principales $\mathrm{div}(f)$, $f \in K(X)^*$.

[$a\,\mathrm{div}(f) + b\,\mathrm{div}(g) = \mathrm{div}(f^a \cdot g^b)$ con $a, b \in \mathbb{Z}$]

$$\Rightarrow \quad \boxed{Cl(X) := \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Pdiv}(X)} \qquad \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$$

$$[D] \mapsto [\mathcal{O}_X(D)]$$

Por otro lado, $\mathrm{Pic}(X) :=$ line bundles, $\otimes$ salvo $\simeq$

y $\quad Cl(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$ donde $+$ pasa a $\otimes$.

$$[D] \mapsto [\mathcal{O}_X(D)]$$

Al estar sobre $\mathbb{C}$, podemos considerar todo analítico (Lady) y la sucesión exponencial:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$$

$n \mapsto$ función constante n

$f \mapsto e^{2\pi i f}$

elementos invertibles en $\mathcal{O}_X$ con operación.

∴ Tenemos sucesión exacta larga en cohomología

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$$
$$\hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X) \to \cdots$$

que se rompe en $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 0$

y

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to \underset{\substack{\wr\!\shortparallel \\ \mathrm{Pic}(X)}}{H^1(X,\mathcal{O}_X^*)} \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to \cdots$$

- Los grupos $H^i(X,\mathbb{Z})$ son finitamente generados.
- $H^1(X,\mathcal{O}_X)/H^1(X,\mathbb{Z}) =: \mathrm{Pic}^0(X)$ es una variedad abeliana (Var. de Picard) de dim $H^0(X,\Omega^1_X)$ por Hodge.

∴ $0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} \underbrace{NS(X)}_{\text{grupo de Néron-Severi}} \to 0$

$\simeq \mathbb{Z}^{\rho(X)} \oplus \underbrace{G}_{\text{finito}}$ (la torsión)

número de Picard de X

$$0 \to \text{continuo} \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} \text{discreto} \to 0$$

Ejlr X = curva $\Rightarrow$ $0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$.

$\mathrm{Pic}^0(X) \cong \mathrm{Jac}(X)^\vee$ (en general $\mathrm{Alb}(X)^\vee$)

Pero ya para superficies, $NS(X)$ puede ser complicado de encontrar.

Por Hodge tenemos $H^2(X,\mathbb{C}) \simeq \underbrace{H^0(\Omega^2_X)}_{\dim = p_g} \oplus H^1(\Omega^1_X) \oplus H^2(\mathcal{O}_X)$

y resulta que $NS(X)\otimes\mathbb{C}$ cae en $H^1(\Omega^1_X)$.

De hecho Lefschetz (1,1) dice:

$$NS(X)/\mathrm{tor} \equiv H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^1(\Omega^1_X).$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(X) \leq h^{1,1}(X) = b_2(X) - 2p_g(X).}$$

[superficies: $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\Omega^2_X)$ gen. geom. $\quad q = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\Omega^1_X)$]

$\boxed{\text{Def}}$.- Una variedad X tiene número de Picard maximal si $\rho = h^{1,1}$.

$\Leftrightarrow NS(X)\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} H^{1,1}(X) \Leftrightarrow H^{1,1} \subset H^2(X,\mathbb{C})$ definido sobre $\mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow H^{2,0} \oplus H^{0,2} \subset H^2(X,\mathbb{C})$ definido sobre $\mathbb{Q}$.

[ya que habría un prod. punto definido por un H amplio tal que son $\perp$]

obs:

(1) variedad con $h^0(\Omega^2_X)=0$ es ρ-maximal.

[Ej: curvas, $p_g=0$ superficies (que hay muchas!)]

(2) X, Y ρ-maximales, $H^1(Y,\mathbb{C})=0$ $\Rightarrow$ $X\times Y$ ρ-maximal

[Aplicar Künneth $H^2(X\times Y,\mathbb{C}) = H^2(X,\mathbb{C})\oplus H^2(Y,\mathbb{C})\oplus H^1(X,\mathbb{C})\otimes \underbrace{\cancel{H^1(Y,\mathbb{C})}}_{0}$
y usar def. sobre $\mathbb{R}$ por ejemplo.]

$\Rightarrow$ $X\times\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ρ-max y $C\times Y$ lo es si C = curva.

(3) $Y\subset X$ subvar. nosing, X ρ-maximal, $\underbrace{H^2(X,\mathbb{C})\xrightarrow{\sim}H^2(Y,\mathbb{C})}$ $\Rightarrow$ Y ρ-maximal

¿Cómo lograr eso?!

Lefschetz: $\underset{\text{divisor amplio}}{Y}\subset X\subset\mathbb{P}^N$ $\Rightarrow$ $H^2(X,\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}H^2(Y,\mathbb{Z})$ si $3<\dim X$.

Luego, juntando con (2), podemos encontrar muchas variedades ρ-max en dim ≥ 3.

Ej: $Y_d\subset\mathbb{P}^4$ $\Rightarrow$ Y_d es ρ-maximal 3-fold.

$X\times Y$ $\Rightarrow$ cortes por hiperplanos son ρ max.

sup. ρ-max con una $\pi_1=0$

con 2 cortes $H^2 \hookrightarrow H^2(\text{sup})$

(π_1 si está OK). ???

¿y $\mathbb{P}^3 \supset X_d$? **No** es válido siempre pero sí genérico

$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d\geq 4$
$\mathbb{P}^2$ ok	$\{xy=wz\} \cong \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ ok ρ max, No de Lefschetz	$Bl_6(\mathbb{P}^2)$ $\cong \mathbb{Z}^7$ ρ max No Lefsc.	terrible. Para d fijo, $NS(X_d)$ varía.

$Bl_6(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^2$, E_i, p_i

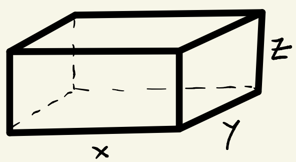
$E_i\cdot E_j = 0$, $E_i^2=-1$

$NS = \mathbb{Z}H \oplus \bigoplus_{i=1}^{6} \mathbb{Z}E_i$

(4) Para el caso de variedades abelianas hay un criterio: Pic Max $\Longleftrightarrow$ isógena a E^g con E complex mult (más endomorfismos que $x\mapsto nx$). Para $C\times C'$ (curva $\times$ curva): Pic Max $\Longleftrightarrow$ $Jac(C)\sim E^g$, $Jac(C')\sim E^{g'}$ con E complex mult.

$\boxed{\text{Beauville concluye que el caso de superficies es el duro de tratar ... Iremos solo por ellas.}}$

[A. Beauville "A tale of two surfaces" 2013.
Stoll, Testa "The surface parametrizing cuboids" 2010.]



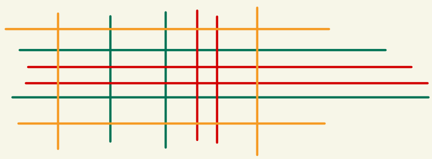
Problema de Euler

$$\left.\begin{aligned} t^2 &= x^2+y^2+z^2\\ u^2 &= y^2+z^2\\ v^2 &= x^2+z^2\\ w^2 &= x^2+y^2 \end{aligned}\right\} = \Sigma \subset \mathbb{P}^6$$

Esta superficie tiene 48 nodos como singularidades. Si $S\to\Sigma$ es la resolución, entonces S es Pic Max.

obs: • Aunque se conoce $\mathrm{Pic}(S)$ (y es maximal), no sabemos cuántas curvas racionales o elípticas hay [Bombieri-Lang conjecture].

• $\Sigma \to X_2 \to X_1 \to \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$

$\Sigma_2 \xrightarrow[2\cdot 2\cdot 2\,:\,1]{}$ 

Si consideramos Σ_m $m \geq 3 \Rightarrow \Sigma_m$ es hiperbólica!!! (A_{m-1}) [«Families of explicit quasi-hyperbolic and hyperbolic surfaces»]

- Una manera recurrente de encontrar sup. con Pic Max es considerar resolución de una superficie con muchas singularidades.

[e.g. Kummer superficies $= E^2/\{\pm 1\}$ E con mult complejo

$\Downarrow$

Todorov superficies también lo serán

Si $\pi : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional entre superficies tal que $\pi^* : H^0(K_Y) \twoheadrightarrow H^0(K_X)$ y Y Pic Max

$\Longrightarrow$ X es Pic Max]

superficies regladas	$\kappa = 0$		$\kappa = 1$	$\kappa = 2$
Al ser biracionales a $\mathbb{P}^1 \times C$, lo cual es Pic Max $\Rightarrow$ Todas lo son.	K3 (abajo) $\xrightarrow[2:1]{\text{étale}}$ Enriques ✓ todos $p_g = 0$, $q = 0$, $\pi_1 = \mathbb{Z}/2$	Abelianas ✓ $\xrightarrow{\text{cociente}}$ bielípticos explícitos	$X \supset ⑥$ $\downarrow$ C $p_g = 0$ ✓ Pero no es fácil describir Pic con secciones $\Rightarrow$ hay forma de describir NS	$p_g = 0 \Rightarrow$ ✓ $p_g = 1 \Rightarrow$ haremos algo abajo. otros p_g ??? Int. completas genéricas no pero particulares quizás.

Problemas: (1) Al parecer no se conocen superficies no deformables a sup. Pic Max. [Beauville muestra un cociente de Bola (casi rígido) el cual no es Pic Max.]

(2) Una particularidad: No se sabe si hay cubrimientos dobles de $\mathbb{P}^2$ ramificados en curvas de grado ≥ 8 que sean Pic Max. [singularidades de nuevo!!!]

Superficies con $p_g = 1$.

Catanese 1979 muestra que las sup. tipo general con $K^2 = 1$, $p_g = 1$ forman un espacio de moduli $\mathcal{M}$ de dim $= 18$. Todas las sup. son simplem. conexas y

$$\text{modelo canónico } (6,6) \subset \mathbb{P}(1,2,2,3,3).$$

Prop: Los PicMax en $\mathcal{M}$ son densos en $\mathcal{M}$ (analíticamente).

Dem: Usa un resultado de Catanese: La imagen del mapeo período es un abierto del dominio período

[vimos

$$\begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \downarrow \\ \mathrm{Def}(S_0) = \underbrace{B}_{\text{base moduli esperada } 20-2K^2} \xrightarrow{\wp} D = \underbrace{SO(2p_g, h^{1,1}-1)/SO(2p_g)\times SO(h^{1,1}-1)}_{\text{dim compleja para } p_g = 1,\ h^{1,1}-1 = 19-K^2} \end{array}$$

fija suave K_{S_0} amplio

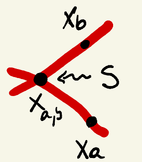
$$12\cdot 2 - K^2 = 2 + 2 + h^{1,1}$$
$$\Rightarrow 20 - K^2 = h^{1,1}$$
]

y la idea es que al ser $\wp(B)$ abierto en D, existen estructuras de Hodge definidas en $\mathbb{Q}$ arbitrariamente cercanas a un punto dado, donde está $[S_0]$, y eso implica superficies PicMax arbitrariamente cercanas en todas direcciones ∎

obs: Lo mismo sucede para superficies K3 donde hay una igualdad de dimensiones también.

obs: Para $p_g = 1$ y $2 \leq K^2 \leq 9$ también tenemos superficies con K amplio, simplemente conexas, donde hay una familia $20-2K^2$ dim. Al otro lado el dominio período tiene dim $19-K^2$.

$K^2 = 9$:



donde $X_{a,b}$ tiene 2 sing de Wahl, proviene de una K3 con $\rho = 20$ (PicMax).

$$(\chi = 2,\ K^2 = 1,2,3,\ldots,9)$$