VARIEDADES TÓRICAS

DEF: UNA VARIEDAD TÓRICA ES UNA VARIEDAD NORMAL X QUE CONTIENE UN TORO COMO UN SUBCONJUNTO ABIERTO DENSO, JUNTO CON UNA ACCIÓN $T \times X \to X$ DE T EN X QUE EXTIENDE A LA ACCIÓN NATURAL DE T EN SÍ MISMO.

EJEMPLO: EL ESPACIO PROYECTIVO $\mathbb{P}^n$ ES UNA VARIEDAD TÓRICA, CONSIDERÁNDOLA COMO LA COMPACTIFICACIÓN USUAL DE $\mathbb{C}^n$.

$$T = (\mathbb{C}^*)^n \subseteq \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{P}^n$$

CONSTRUCCIÓN (AFÍN)

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma & \longmapsto & \sigma^\vee & \longmapsto & S_\sigma & \longmapsto & k[S_\sigma] & \longmapsto & U_\sigma \\ \text{CONO} & & \text{CONO DUAL} & & \text{SEMIGRUPO} & & k\text{-ÁLGEBRA f.g} & & \text{VARIEDAD} \end{array}$$

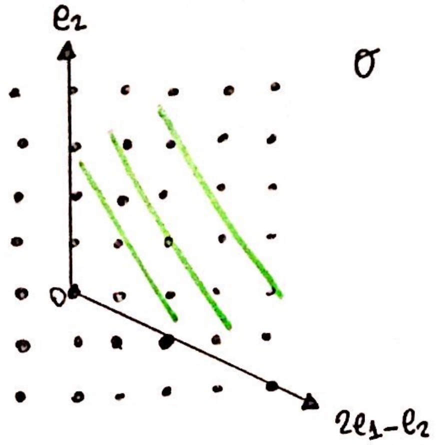
CONSIDEREMOS UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA SOBRE $\mathbb{R}$ $(V \cong \mathbb{R}^n)$,

DEF: UN SUBCONJUNTO $Z \subseteq V$ ES UN CONO SI PARA TODOS $u \in Z$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lambda u \in Z$. Z ES UN CONO CONVEXO SI Y SOLO SI Z ES UN CONO Y DADOS $u_1, u_2 \in Z$ TENEMOS QUE $u_1 + u_2 \in Z$. UN CONO CONVEXO ES POLIÉDRICO SI ES GENERADO POR UNA CANTIDAD FINITA DE VECTORES.

SEA N UN RETÍCULO CONTENIDO EN V $(N \cong \mathbb{Z}^n)$, DECIMOS QUE UN CONO CONVEXO POLIÉDRICO ES RACIONAL SI ES GENERADO POR ELEMENTOS EN N.

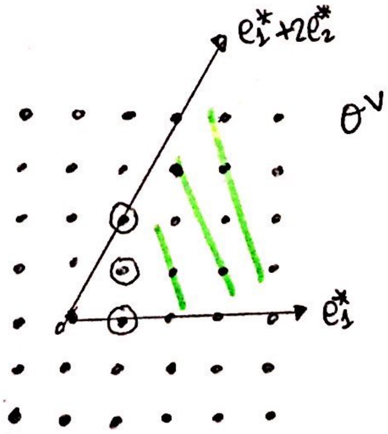
DECIMOS QUE UN CONO CONVEXO POLIÉDRICO RACIONAL Z, ES FUERTEMENTE CONVEXO SI SIEMPRE QUE u Y $-u$ ESTÉN EN Z, TENEMOS QUE $u=0$.

<u>EJEMPLO</u>: SEA $N=\mathbb{Z}^2$, EL CONO GENERADO POR e_2 Y $2e_1-e_2$ ES



<u>DEF</u>: SEA $M=\mathrm{Hom}(N,\mathbb{Z})$ EL RETICULO DUAL, CON LA APLICACIÓN NATURAL $\langle\cdot,\cdot\rangle$. SI σ ES UN CONO EN N, EL <u>CONO DUAL</u> ES EL CONJUNTO DE VECTORES EN $M_{\mathbb{R}}$ QUE SON NO NEGATIVOS EN σ, SE DENOTA POR $\sigma^\vee$.

<u>EJEMPLO</u>: SEA $N=\mathbb{Z}^2$, SEA σ EL CONO GENERADO POR e_2 Y $2e_1-e_2$. EL CONO DUAL $\sigma^\vee$ ES EL CONO GENERADO POR e_1^* Y $e_1^*+2e_2^*$.



EL CONO DUAL $\sigma^\vee$, DETERMINA UN SEMIGRUPO FINITAMENTE GENERADO, A SABER,

$$S_\sigma=\sigma^\vee\cap M=\{u\in M:\ (u,v)\geq 0\ \ \forall v\in\sigma\}.$$

<u>EJEMPLO</u>: SEA $N=\mathbb{Z}^2$, σ EL CONO GENERADO POR e_1 Y $2e_1-e_2$, EL CONO DUAL $\sigma^\vee$ ENTONCES $S_\sigma=\langle e_1^*,\ e_1^*+e_2^*,\ e_1^*+2e_2^*\rangle$.

DADO EL SEMIGRUPO S_σ, LE ASOCIAMOS LA k-ALGEBRA $k[S_\sigma]$ COMO SIGUE.

$$S_\sigma \longrightarrow k[S_\sigma]$$
$$u \longmapsto \chi^u$$

EJEMPLO: $k[\mathbb{N}^n] \cong k[t_1,\dots,t_n]$, $k[\mathbb{Z}^n] \cong k[t_1^{\pm 1},\dots,t_n^{\pm 1}]$.

ESTO IDENTIFICANDO $\chi^{e_i} \longleftrightarrow t_i$.

EJEMPLO: SEA $S_\sigma = \langle e_1^*, e_1^*+e_2^*, e_1^*+2e_2^*\rangle$, SI DENOTAMOS POR $x=\chi^{e_1}, y=\chi^{e_2}$

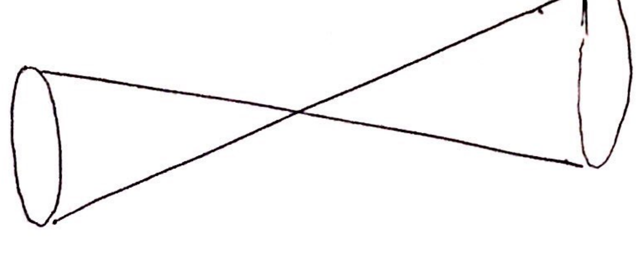
$$e_1^* \longmapsto \chi^{e_1^*} = x$$
$$e_1^*+e_2^* \longmapsto \chi^{e_1^*+e_2^*} = xy$$
$$e_1^*+2e_2^* \longmapsto \chi^{e_1^*+2e_2^*} = xy^2$$

TENEMOS QUE $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x, xy, xy^2]$.

DADA UNA k-ALGEBRA K FINITAMENTE GENERADA, TENEMOS UNA VARIEDAD AFÍN ASOCIADA QUE DENOTAMOS POR $\operatorname{Spec}(K)$.

EJEMPLO: $\mathbb{C}[x,xy,xy^2] = \mathbb{C}[u,v,w]/\langle v^2-uw\rangle$.

ASÍ $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,xy,xy^2]) = \{(u,v,w)\in \mathbb{C}^3 : v^2=uw\}$ CONO CUÁDRICO (VARIEDAD)



DADO UN RETÍCULO N ($N \cong \mathbb{Z}^n$) UN ABANICO (FAN) Δ ES UNA COLECCIÓN DE CONOS σ EN EL ESPACIO VECTORIAL REAL $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ($\cong \mathbb{R}^n$) TAL QUE

i) CUALQUIER CARA DE UN CONO EN Δ TAMBIÉN ESTÁ EN Δ

ii) LA INTERSECCIÓN DE DOS CONOS EN Δ ES UNA CARA DE CADA UNO.

EJEMPLO: $N = \mathbb{Z}^2$, σ EL CONO GENERADO POR e_2 y $2e_1 - e_2$, UNA CARA DEL CONO σ ES EL CONO GENERADO POR e_2 (τ).

DADA UNA CARA τ DE σ TENEMOS QUE $S_\sigma \subseteq S_\tau$, LUEGO

$$k[S_\sigma] \hookrightarrow k[S_\tau]$$

$$\equiv$$

$$U_\tau \hookrightarrow U_\sigma.$$

DADO UN ABANICO Δ, PODEMOS ASOCIARLE UNA VARIEDAD, QUE DENOTAMOS POR $X(\Delta)$.

EJEMPLO: (CONSTRUCCIÓN TÓRICA DE $\mathbb{P}^2$).

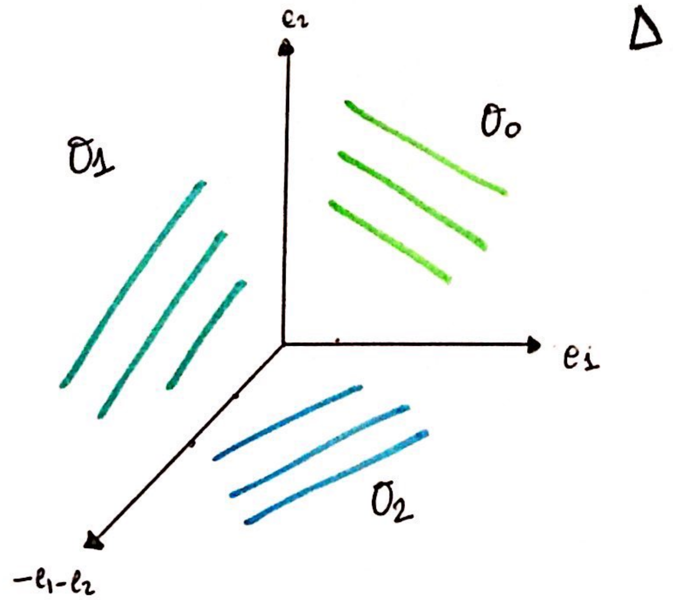
$$\mathbb{P}^2 = \{[t_0, t_1, t_2] : t_0 \neq 0, t_1 \neq 0 \text{ o } t_2 \neq 0\}.$$

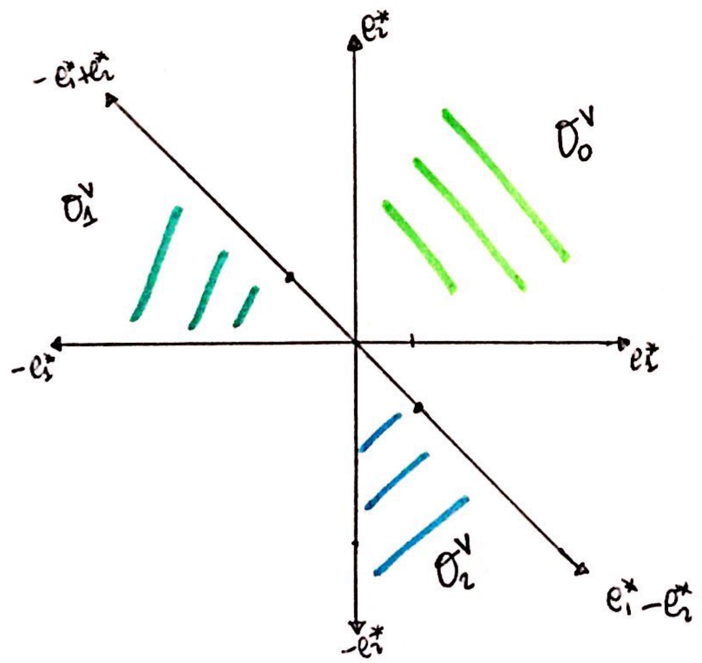
$U_0 = \{t_0 \neq 0\} = \left\{\left(\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}\right) : t_1, t_2 \in \mathbb{C}\right\}$ COORDENADAS (z_1, z_2)

$U_1 = \{t_1 \neq 0\} = \left\{\left(\frac{t_0}{t_1}, \frac{t_2}{t_1}\right) : t_0, t_2 \in \mathbb{C}\right\}$ COORDENADAS $(z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2)$

$U_2 = \{t_2 \neq 0\} = \left\{\left(\frac{t_0}{t_2}, \frac{t_1}{t_2}\right) : t_0, t_1 \in \mathbb{C}\right\}$ COORDENADAS $(z_2^{-1}, z_2^{-1} z_1)$.

SEA $N=\mathbb{Z}^2$ y Δ EL ABANICO FORMADO POR $\sigma_0=\langle e_1,e_2\rangle$, $\sigma_1=\langle e_2,-e_1-e_2\rangle$ y $\sigma_2=\langle e_1,-e_1-e_2\rangle$





① $S_{\sigma_0}=\langle e_1^*,e_2^*\rangle$, $\mathbb{C}[S_{\sigma_0}]=\mathbb{C}[z_1,z_2]$

$$U_{\sigma_0}=\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_0}])=\mathbb{C}^2_{(z_1,z_2)}=U_0.$$

② $S_{\sigma_1} = \langle -e_1^*, -e_1^*+e_2^* \rangle$, $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2]$

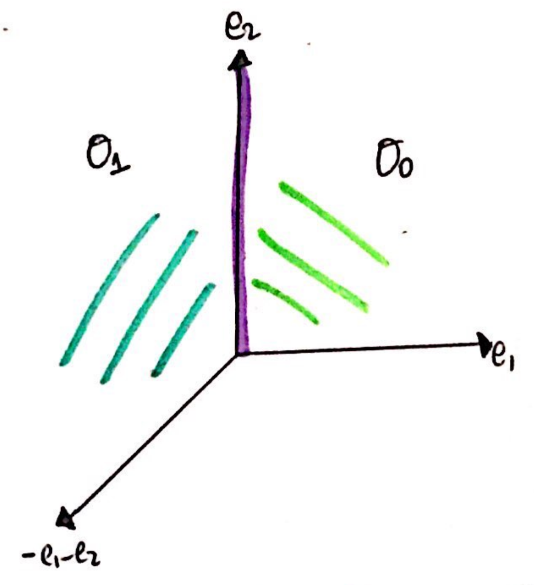
$$U_{\sigma_1} = \operatorname{spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]) = \mathbb{C}^2_{(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)} = U_1$$

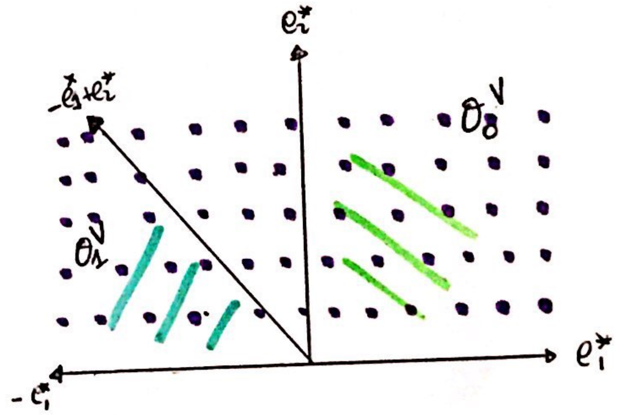
③ $S_{\sigma_2} = \langle -e_2^*, e_1^*-e_2^* \rangle$, $\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] = \mathbb{C}[z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1}]$

$$U_{\sigma_2} = \operatorname{spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_2}]) = \mathbb{C}^2_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})} = U_2$$

LA ESTRUCTURA DEL ABANICO NOS DA UN PEGADO ENTRE ESTAS TRES CARTAS PERMITIENDO OBTENER $\mathbb{P}^2$ DESDE LOS U_{σ_i}.

<u>PEGADO DE U_{σ_0} Y U_{σ_1}</u>





$\tau = \sigma_0 \cap \sigma_1 = \langle e_2 \rangle$, S_τ ES EL SEMIGRUPO ASOCIADO, TENEMOS QUE

$$S_\tau = S_{\sigma_0} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-e_1^*) = \langle -e_1^*, e_1^*, e_2^* \rangle$$

$$S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(e_1^*) = \langle -e_1^*, -e_1^*+e_2^*, e_1^* \rangle$$

ASÍ,

U_τ ES REPRESENTADA POR $\mathbb{C}^*_{z_1}\times\mathbb{C}_{z_2}$ EN $U_{\sigma_0}=\mathbb{C}^2_{(z_1,z_2)}$

U_τ ES REPRESENTADA POR $\mathbb{C}^*_{z_1^{-1}}\times\mathbb{C}_{z_1^{-1}z_2}$ EN $U_{\sigma_1}=\mathbb{C}^2_{(z_1^{-1},z_1^{-1}z_2)}$.

Y PEGAMOS U_{σ_0} y U_{σ_1} A LO LARGO DE U_τ HACIENDO UN CAMBIO DE COORDENADAS

$$(z_1,z_2)\longmapsto(z_1^{-1},z_1^{-1}z_2)$$

$(\mathbb{P}^2\setminus\{(0:0:1)\})$.

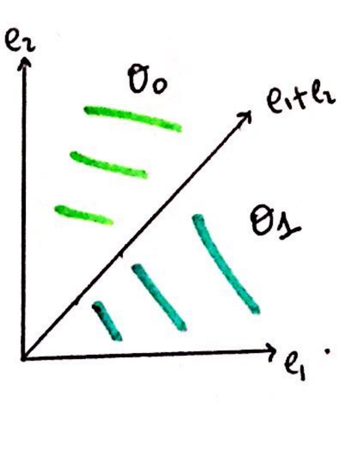
<u>EJEMPLO</u>: (CONSTRUCCIÓN TÓRICA DEL $Bl_{p_0}(\mathbb{C}^2)$).

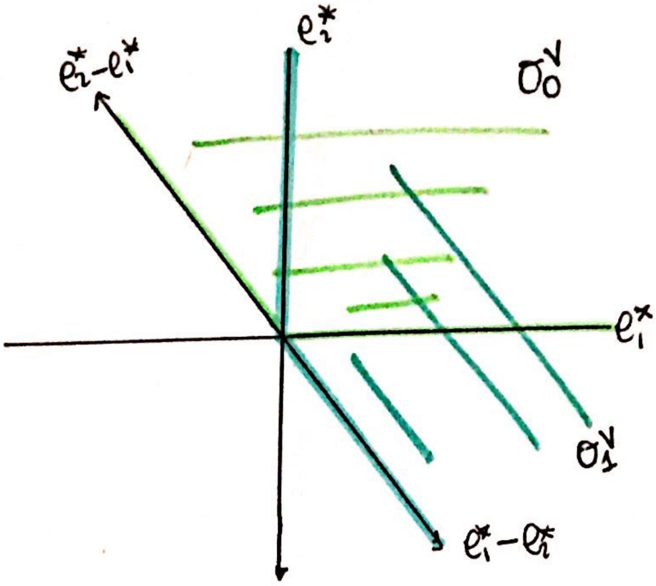
$Bl_{p_0}(\mathbb{C}^2)=\{((x,y),t_0,t_1): xt_1=yt_0,\ (x,y)\in\mathbb{C}^2,\ [t_0,t_1]\in\mathbb{P}^1\}\subseteq\mathbb{C}^2\times\mathbb{P}^1$

$U_0=\{t_0\neq0\}=\{(x,y,\frac{t_1}{t_0}): xt_1=yt_0\}$ COORDENADAS $(x,\frac{t_1}{t_0})=(x,x^{-1}y)$

$U_1=\{t_1\neq0\}=\{(x,y,\frac{t_0}{t_1}): xt_1=yt_0\}$ COORDENADAS $(y,\frac{t_0}{t_1})=(y,xy^{-1})$

SEA $N=\mathbb{Z}^2$ y Δ EL ABANICO FORMADO POR $\sigma_0=\langle e_2,e_1+e_2\rangle$, y $\sigma_1=\langle e_1+e_2,e_1\rangle$





① $S_{\sigma_0} = \langle e_1^*, e_2^*-e_1^* \rangle$, $\mathbb{C}[S_{\sigma_0}] = \mathbb{C}[x, x^{-1}y]$

$$U_{\sigma_0} = \operatorname{spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_0}]) = \mathbb{C}^2_{(x, x^{-1}y)}$$

② $S_{\sigma_1} = \langle e_2^*, e_1^*-e_2^* \rangle$, $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[y, xy^{-1}]$

$$U_{\sigma_1} = \operatorname{spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]) = \mathbb{C}^2_{(y, xy^{-1})}.$$

PEGAMOS U_{σ_0} y U_{σ_1} A LO LARGO DE U_τ · $(\tau = e_1 + e_2)$ HACIENDO UN CAMBIO DE COORDENADAS

$$(x, x^{-1}y) \longrightarrow (y, xy^{-1}).$$ ■