Variedades tóricas afínes y semigrupos

Juan Pablo Zúñiga

Seminario baby de geometría algebraica

27/08/2020

Equivalencias de categorías

Recordemos que para el caso de variedades afines, esta categoría es equivalente a la de *k-álgebras* finitamente generadas y que son dominios. Para el caso de variedades tóricas afines, sería excelente tener una categoría de objetos algebraicos que justamente capture la acción del toro.

En la charla de hoy veremos que los semigrupos son aquellos objetos que permiten hacer dicha traducción En concreto, que la categoría de variedades tóricas afínes es equivalente a la de k-álgebras que provienen de un semigrupo con ciertas condiciones de finitud.

Definición:

Un semigrupo es un conjunto S junto con una operación $+$ tal que:

- $+$ es conmutativa.
- $+$ es asociativa.
- hay un elemento neutro 0.

Un mapa $\varphi : S \to S'$ es un morfismo de semigrupos si cumple que $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ y que $f(0) = 0$.

A un semigrupo S le podemos asociar una k-álgebra $K[S]$ dada por el k-espacio vectorial con base $\{\chi^u : u \in S\}$ y producto $\chi^u \chi^v := \chi^{u+v}$.

Ejemplos:

- Si $S = \mathbb{N}^n$, entonces $k[S] = k[x_1, ..., x_n]$.
- Si $S = \mathbb{Z}^n$, entonces $k[S] = k[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$.
- Si $S = (k, \cdot)$, entonces $k[S] = \bigoplus_{i \in k} k$

Un morfismo de semigrupos $\varphi : S \to S'$ también induce un morfismo a nivel de álgebras $f : K[S] \to K[S']$ dado por $f(\chi^u) = \chi^{\varphi(u)}$.

Para que estas álgebras tengan alguna relación con variedades afínes, le debemos pedir al semigrupo que cumpla ciertas condiciones de finitud

Definición:

Sea S un semigrupo, S es finitamente generado si existe un morfismo sobreyectivo de semigrupos $\varphi : \mathbb{N}^n \to S$ para algún n.

Similarmente, S es un semigrupo integral si existe morfismo inyectivo de semigrupos $S \to \mathbb{Z}^m$ para algún m.

Si S es un semigrupo que cumple ambas condiciones, vemos que $k[S]$ es una k-álgebra finitamente generada y que además es un dominio integral. Por lo tanto, $k[S]$ es el álgebra de la variedad $X = Spec(K[S])$.

Con los ejemplos anteriores vemos que $Spec(k[\mathbb{N}^n]) = \mathbb{A}^n$ y $Spec(k[\mathbb{Z}^n]) = (k^*)^n$.

¿Cómo se refleja el semigrupo sobre X?

Primero vale la pena notar las correspondencias

$$X \Leftrightarrow Hom_{k-alg}(k[S], k) \Leftrightarrow Hom(S, (k, \cdot))$$

Definidas por: $(p \in X) \Rightarrow (f_p : k[S] \to k) \Rightarrow (\varphi_p : S \to k)$ donde $\varphi_p(u) := f_p(\chi^u)$.

A partir del morfismo de k-álgebras $\Phi : k[S] \to k[S] \otimes_k K[S]$ dado por $\Phi(\chi^u) = \chi^u \otimes \chi^u$ obtenemos una operación $\star : X \times X \to X$, la cual a nivel de $Hom(S, (k, \cdot))$ es justamente el producto puntual de morfismos de semigrupos e identidad el mapa trivial 1. Con esta operación $Hom(S, (k; \cdot))$ es un semigrupo.

Bajo las correspondencias observamos que $(X, \star)$ es un semigrupo también. Por ejemplo, si $X = \mathbb{A}^n$, la operación es: $(x_1, ..., x_n) \star (y_1, ..., y_n) = (x_1 y_1, ..., x_n y_n)$ con identidad $(1, ..., 1)$. Igual para $X = (k^*)^n$.

Estructura tórica

Si $T = Spec(k[M])$ donde M es un grupo, vemos que $Hom(M, (k, \cdot))$ también lo es. Pues si $\varphi \in Hom(M, (k, \cdot))$ es tal que $\varphi(u) = f_p(\chi^u)$, entonces el morfismo de k-álgebras $f_{p^{-1}}(\chi^u) := f_p(\chi^{-u})$ induce el inverso de φ. Por lo tanto, T es un grupo algebraico.

Dado que en nuestro contexto M es integral, este debe ser libre abeliano de rango finito m. Entonces

$$T \cong Hom(M, k^*) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \otimes k^* \cong (k^*)^m$$

Por lo tanto, T **es un toro**.

¿Cómo capturamos la acción del toro mediante semigrupos?

Definición:

Sea S semigrupo finitamente generado e integral, denotamos $S^{gp} := Span_{\mathbb{Z}}\{u - v : u, v \in S\}$ visto en $\mathbb{Z}^m$ donde S se inyecta.

Estructura tórica

Definición:

Dado un semigrupo S finitamente generado e integral, la variedad tórica afín asociada a S es $X = Spec(k[S])$ junto al toro $T = Spec(K[S^{gp}])$.

Al considerar la inclusión $i : S \to S^{gp}$, vemos que esta induce una incrustación abierta $j : T \to X$. Si S es generado por $u_1, ..., u_n$, entonces S^{gp} es generado por $u_1, ..., u_n$ y $-(u_1 + \cdots + u_n)$, lo cual nos permite ver que $k[S^{gp}] = k[S]_{\chi^{u_1+\cdots+u_n}}$ y consecuentemente que $j(T) \cong D(\chi^{u_1+\cdots+u_n})$.

Mediante j, notamos que la operación de grupo sobre T se extiende a la acción $T \times X \to X$. Con esta definición de variedad tórica, notamos que esta coincide con la definición usual (Una variedad que contiene un toro denso tal que su acción se extiende a toda la variedad).

Ejemplos:

A partir de la siguiente proposición es posible calcular la variedad tórica asociada a un semigrupo S.

Proposición:

Sea $\varphi : \mathbb{N}^n \to S$ el morfismo sobreyectivo de semigrupos y $f : k[x_1, ..., x_n] \to k[S]$ el inducido en álgebras, entonces

$$ker(f) = (\chi^a - \chi^b | \varphi(a) = \varphi(b))$$

Sea $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Vemos que $S =< 2, 3 >$ y $S^{gp} = \mathbb{Z}$. Entonces $X = V(x^3 - y^2)$ y $T = (k)^*$. La incrustación $j : T \to X$ viene dada por $j(\lambda) = (\lambda^2, \lambda^3)$ y por consiguiente la acción es $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^3 y)$.

Sea $S = Span_{\mathbb{N}}\{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$. El kernel del homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3$ dado por $\varphi(x, y, z, w) = (x, y, x + y - z)$ es $Span_{\mathbb{Z}}\{(1, 1, -1, -1)\}$, entonces

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^8 : \varphi(a) = \varphi(b)\} = \{((a, a, 0, 0), (0, 0, a, a)) : a \in \mathbb{N}\}$$

Por lo que, $ker(f) = (xy - zw)$ y $X = V(xy - zw)$.

Ejemplos:

Dado que $S^{gp} = \mathbb{Z}^3$, entonces $T = (k^*)^3$. Puesto que $j(\lambda, \mu, \theta) = (\lambda, \mu, \theta, \frac{\lambda\mu}{\theta})$, entonces la acción de T sobre X es

$$(\lambda, \mu, \theta) \cdot (x, y, z, w) = (\lambda x, \mu y, \theta z, \frac{\lambda \mu w}{\theta})$$

Definición:

Un morfismo de variedades tóricas afines es un par $(f, g) : (X, T) \to (X', T')$ donde $f : X \to X'$ es morfismo de variedades y $g : T \to T'$ es un homomorfismo de grupos algebraicos, tales que $f(\lambda \cdot q) = g(\lambda) \cdot f(q)$.

Dado un homomorfismo $\varphi : S \to S'$ de semigrupos, este induce un homomorfismo de grupos $\varphi^{gp} : S^{gp} \to (S')^{gp}$.

Ejemplos:

Dado que $S^{gp} = \mathbb{Z}^3$, entonces $T = (k^*)^3$. Puesto que $j(\lambda, \mu, \theta) = (\lambda, \mu, \theta, \frac{\lambda\mu}{\theta})$, entonces la acción de T sobre X es

$$(\lambda, \mu, \theta) \cdot (x, y, z, w) = (\lambda x, \mu y, \theta z, \frac{\lambda\mu w}{\theta})$$

Definición:

Un morfismo de variedades tóricas afines es un par $(f, g) : (X, T) \to (X', T')$ donde $f : X \to X'$ es morfismo de variedades y $g : T \to T'$ es un homomorfismo de grupos algebraicos, tales que $f(\lambda \cdot q) = g(\lambda) \cdot f(q)$.

Dado un homomorfismo $\varphi : S \to S'$ de semigrupos, este induce un homomorfismo de grupos $\varphi^{gp} : S^{gp} \to (S')^{gp}$. Por medio del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
k[S] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi"] & k[S'] \arrow[d, "\Phi"] \\
k[S] \otimes k[S^{gp}] \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi^{gp}"] & k[S'] \otimes k[(S')^{gp}]
\end{tikzcd}$$

Semigrupos vs Variedades tóricas afines

Observamos que a nivel de variedades se tiene,

$$\begin{tikzcd}
T' \times X' \arrow[r, "\overline{\varphi^{gp}} \times \overline{\varphi}"] \arrow[d] & T \times X \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & X
\end{tikzcd}$$

luego, $(\overline{\varphi}, \overline{\varphi^{gp}})$ es un morfismo de variedades tóricas.

Con lo ya desarrollado podemos definir un functor:

$$F : \{\textit{Semigrupos f.g e integrales}\} \to \{\textit{Variedades tóricas afines}\}$$

dado por $F(S) = Spec(k[S])$ y $F(\varphi) = (\overline{\varphi}, \overline{\varphi^{gp}})$. Como habíamos mencionado al inicio, este resulta ser una equivalencia de categorías. Para ello, vamos a mostrar que F es fully-faithful y escencialmente sobre.

Semigrupos vs Variedades tóricas

Proposición:

Sean S y S' semigrupos. Si $f : Spec(k[S]) \to Spec(k[S'])$ y $g : Spec(k[S^{gp}]) \to Spec(k[(S')^{gp}])$ conforman un morfismo de variedades tóricas, entonces existe un único morfismo $\varphi : S' \to S$ que se induce a (f, g).

Demostración:

Denotamos por M y M' a los grupos S^{gp} y $(S')^{gp}$ respectivamente. Puesto que g es un morfismo de grupos algebraicos, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} k[M'] & \xrightarrow{\Phi} & k[M'] \otimes k[M'] \\ \Big\downarrow g^* & & \Big\downarrow g^* \otimes g^* \\ k[M] & \xrightarrow{\Phi} & k[M] \otimes k[M] \end{array}$$

Si tomamos $u' \in M$ y escribimos $g^*(\chi^{u'}) = \sum_{u \in M} \alpha_u \chi^u$, por medio del diagrama notamos que $\sum_{u \in M} \alpha_u (\chi^u \otimes \chi^u) = \sum_{u_1 \in M} \sum_{u_2 \in M} \alpha_{u_1} \alpha_{u_2} (\chi^{u_1} \otimes \chi^{u_2})$.

Lo anterior implica que $\alpha_{u_1}\alpha_{u_2} = 0$ para $u_1 \neq u_2$, luego $\alpha_u \neq 0$ para un único $u \in M$. Así mismo, tenemos $\alpha_u^2 = \alpha_u$, por lo que, $\alpha_u = 1$. Ya con esto podemos definir el homomorfismo $\varphi^{gp} : M' \to M$ dado por $\varphi^{gp}(u') = u$. Si tomamos las incrustaciones $j : T \to X$ y $j' : T' \to X'$, vemos que por la igualdad $(j')^* \circ f^* = g^* \circ j^*$ se cumple que $\varphi^{gp}(S') \subseteq S$.

Por consiguiente, al definir el morfismo de semigrupos $\varphi = \varphi^{gp}|_S$ este induce (f, g) y además es único por construcción.

Proposición:

Si (X, T) una variedad tórica afín, entonces existe un semigrupo S finitamente generado e integral, tal que $X \cong Spec(k[S])$ y $T \cong Spec(k[S^{gp}])$ como grupos algebraicos.

Demostración:

Suponemos que $T = Spec(k[M])$ donde M es grupo abeliano libre de rango finito. Dado que T es denso en X podemos suponer que $\mathcal{O}(X) \subseteq k[M]$. Puesto que la operación de X extiende a la acción de T, obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & \longrightarrow & k[M] \otimes \mathcal{O}(X) \\ \big\downarrow i & & \big\downarrow i \\ k[M] & \xrightarrow{\Phi} & k[M] \otimes k[M] \end{array}$$

Si tomamos $\sum_{u \in M} \alpha_u \chi^u \in \mathcal{O}(X)$, del diagrama vemos que $\sum_{u \in M} \chi^u \otimes (\alpha_u \chi^u) \in k[M] \otimes \mathcal{O}(X)$, lo cual implica que $\chi^u \in \mathcal{O}(X)$ para todo u con $\alpha_u \neq 0$. Si para cada $f \in \mathcal{O}(X)$ denotamos con I_f al conjunto de los u que tienen coeficiente distinto de 0 y hacemos $S = \bigcup_{f \in \mathcal{O}(X)} I_f$, notamos que $\mathcal{O}(X) = k[S]$.

Este S es un semigrupo finitamente generado porque $\mathcal{O}(X)$ es un álgebra finitamente generada. También es integral, pues $S \subseteq M$. Por lo tanto, $X = Spec(k[S])$ con las hipótesis señaladas.

Semigrupos vs Variedades tóricas afines

Solo falta mostrar que $S^{gp} = M$.

Solo falta mostrar que $S^{gp} = M$. Al tener $rank(S^{gp}) = dim(X)$, nos percatamos de que $rank(M) = rank(S^{gp})$.

Si tuviéramos que $S^{gp} \neq M$, el morfismo $Spec(k[M]) \to Spec(k[S^{gp}])$ sería finito con grado $[M : S^{gp}]$. Dado que los morfismos finitos son cerrados, lo anterior implicaría que la incrustación $T \to Spec(k[S^{gp}]) \to X$ sea abierta y cerrada, pero esto es una contradicción pues se tendría que $T = X$.

Con esto demostramos que es equivalente estudiar variedades tóricas afines y semigrupos finitamente generados e integrales. En particular, si tenemos dos toros $T = Spec(k[M])$ y $T' = Spec(K[M'])$, se obtiene un isomorfismo canónico

$$Hom_{alg-gp}(T, T') \cong Hom_{\mathbb{Z}}(M', M)$$