Geometría Convexa I

24-9

Hemos visto Variedades Tóricas afines.

$$\left\{\begin{matrix} S \\ \text{semigrupos} \\ \text{f.g.}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \mathbb{C}[S] \\ \text{álgebra} \\ \text{f.g.}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S]) \\ \text{Variedades} \\ \text{Tóricas afines}\end{matrix}\right\}$$

Veremos que de geometría convexa, se puede construir

$$\left\{\begin{matrix} \sigma \\ \text{Conos convexos} \\ \text{"Buenos"}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{usando dualidad}} \left\{\begin{matrix} S \\ \text{Semigrupos} \\ \text{f.g.}\end{matrix}\right\}$$

Geometria Convexa I

24-9

• Conceptos Básicos:

- Consideraremos V e.v. sobre $\mathbb{R}$ $(\dim V < \infty)$ con espacio dual U.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : U \times V \to \mathbb{R}$$

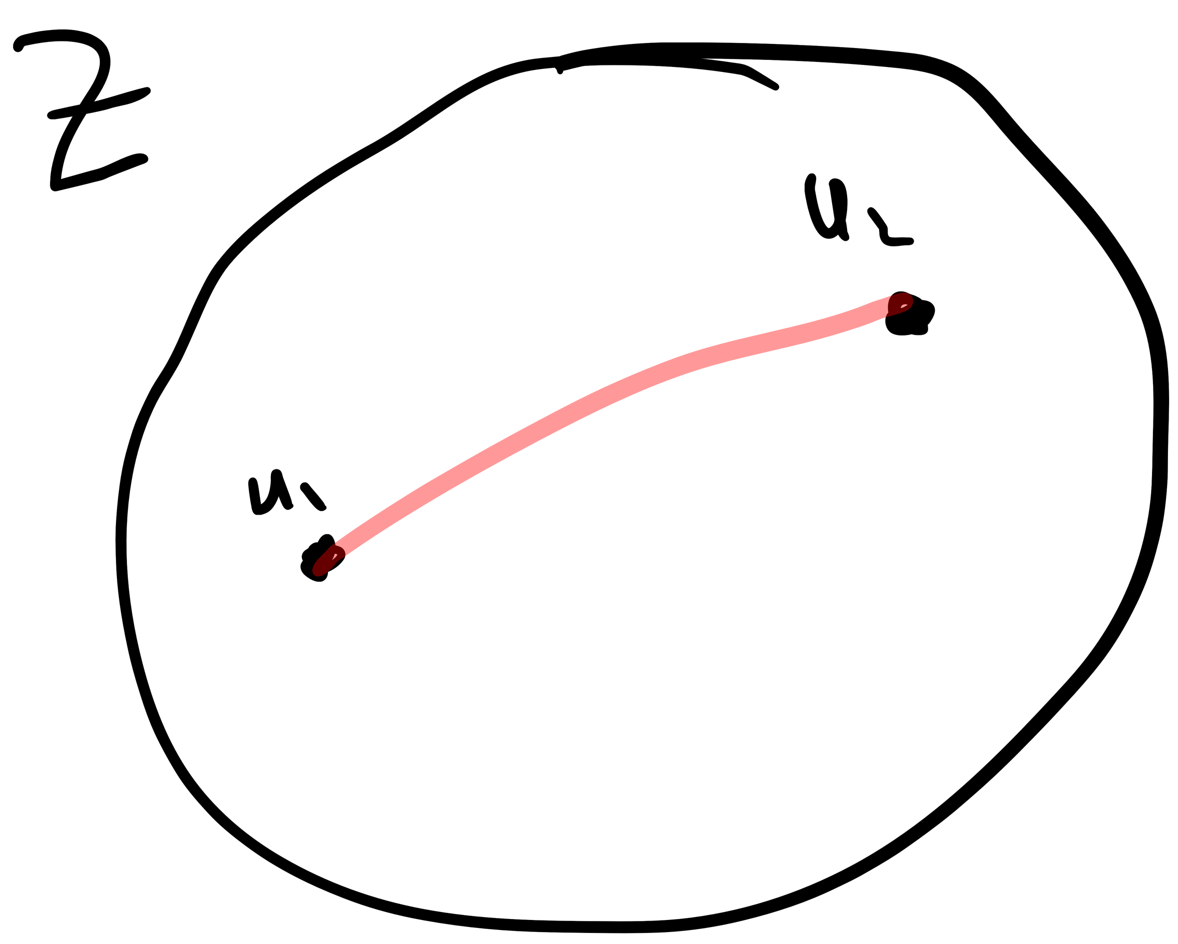
el pareo natural.

- Estructura integral N es un lattice en V.

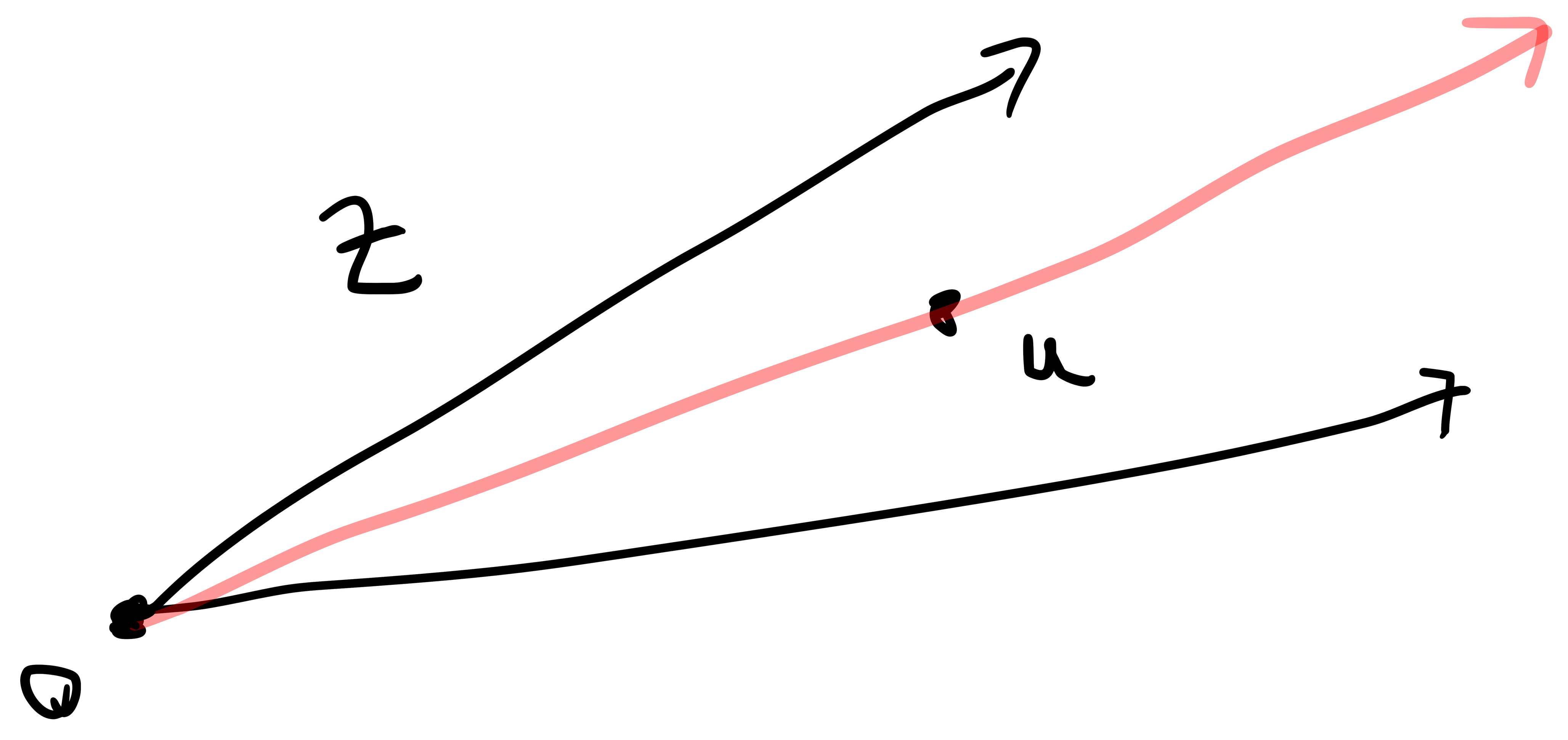
$$N_{\mathbb{Q}} \subset N_{\mathbb{R}} \subset V$$

Luego $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$, induce dualidad

Def] Un conjunto $Z \subset V$ es <u>convexo</u> si para todo $u_1, u_2 \in Z$, $\lambda \in [0,1]$ se tiene $\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in Z$.



Def) Un cjto. $Z \subset V$ es un **cono** si para cada $u \in Z$, $\lambda \geq 0$ se tiene $\lambda u \in Z$.



- Llamaremos contorno convexo de Z a

$$\mathrm{conv}(Z) = \bigcap_{\substack{K \supset Z \\ \text{convexo}}} K$$

- De la misma manera, cono convexo generado por Z a

$$\mathrm{pos}(Z) = \bigcap_{\substack{K \supset Z \\ \text{cono}}} K$$

* Z cjto. de generadores.

Lema 1) Para todo $Z \subset V$, tenemos

$$\mathrm{conv}(Z) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, v_i \in Z \right\}$$

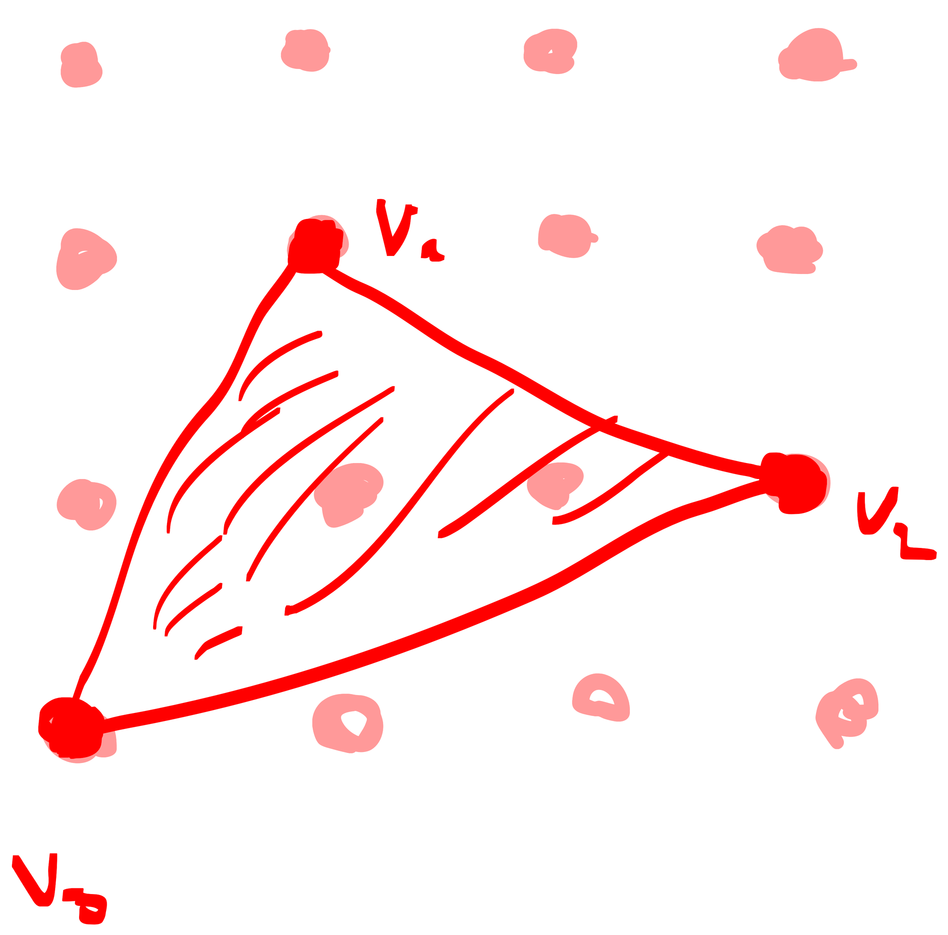
Lema 2 Para todo $Z \subset V$, tenemos

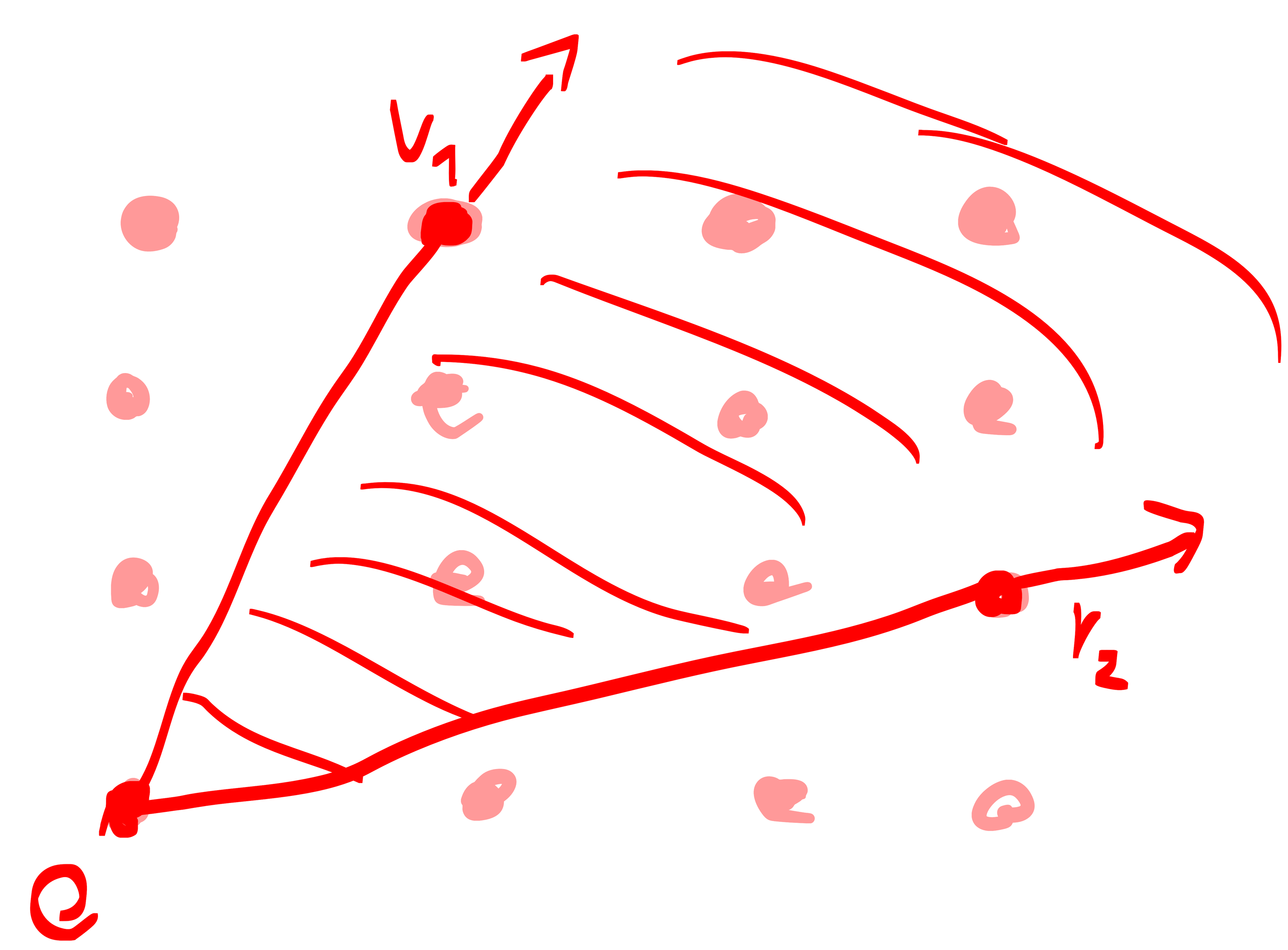
$$\text{pos}(Z) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0,\ v_i \in Z \right\}$$

Dem.

- Un <u>Politopo convexo</u> (polytope) es el contorno convexo de finitos vectores en V.
- Un cono convexo <u>Poliedral</u> es el generado por finitos vectores en V.

Motivación de lo que veremos. En presencia de N, llamaremos a estos objetos como <u>Racionales</u> si sus generadores estan en el lattice.

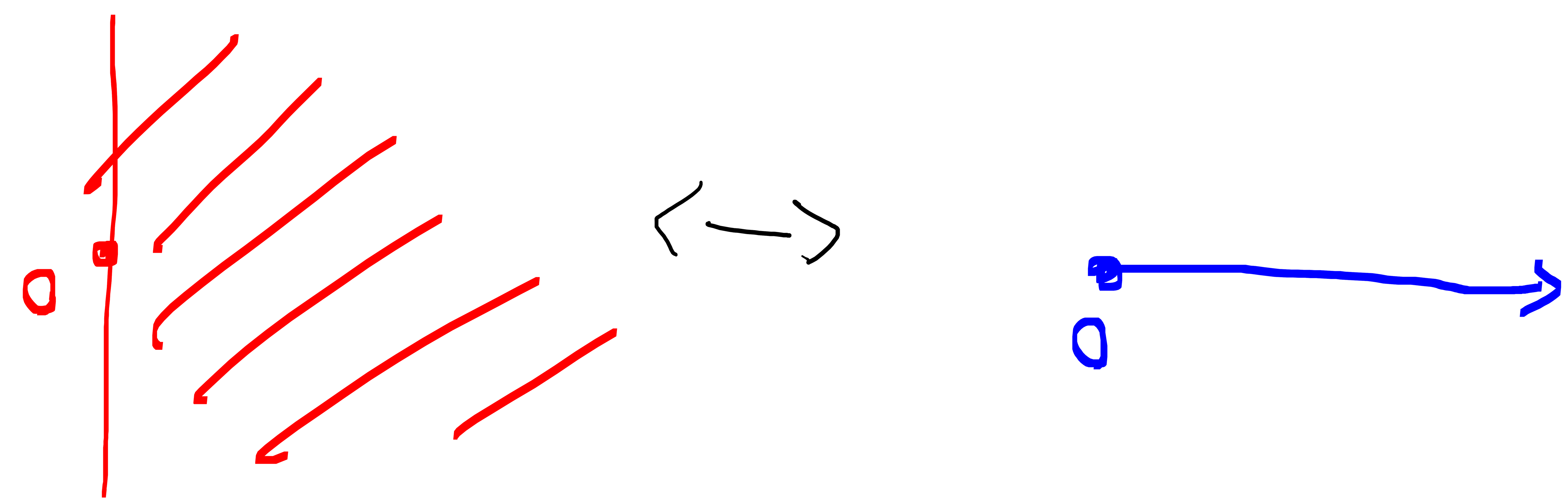




- N lattice

- Diremos que un cono σ convexo es <u>punteado</u>, si

$$v, -v \in \sigma \implies v = 0.$$



considerando $W = \sigma \cap (-\sigma) := \{v \in \sigma \mid -v \in \sigma\}$
tenemos por proyección $p: V \to V/_W$ que

$$\sigma \cong W \times \underbrace{p(\sigma)}_{\hookrightarrow \text{ cono punteado}}$$

<u>Lema 3)</u> Todos los politopos y conos poliedrales convexos son cerrados en V.

<u>Dem.</u>

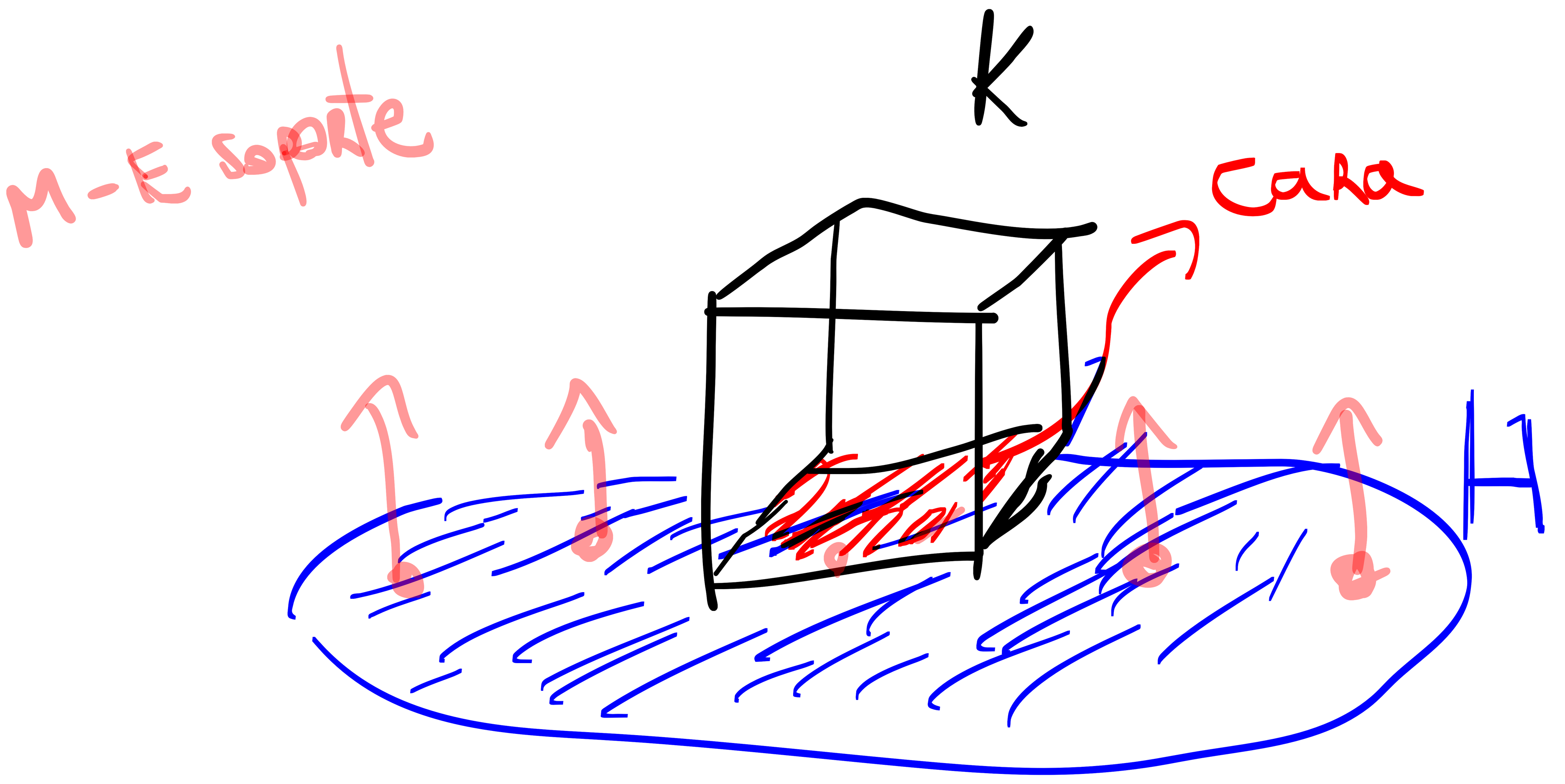
Conjuntos convexos cerrados

Tomemos K con tales condiciones. Nos interesan

- Hiperplanos soporte: Hiperp. afín H que cumple $H \cap K \neq \emptyset$, donde K está contenido por completo en uno de los medios-espacios que H determina. A estos últimos los llamaremos medio-espacios soportes

- Una cara de K es $K \cap H$, donde H es hiperp. soporte.

* $\emptyset, K$ caras impropias



Prop 1 Un cjto. convexo cerrado es la intersección de sus medio-espacios soporte.

Dem.

- Para tales cjtos. K denotaremos su dimensión como la dim del espacio afín generado (dim K)

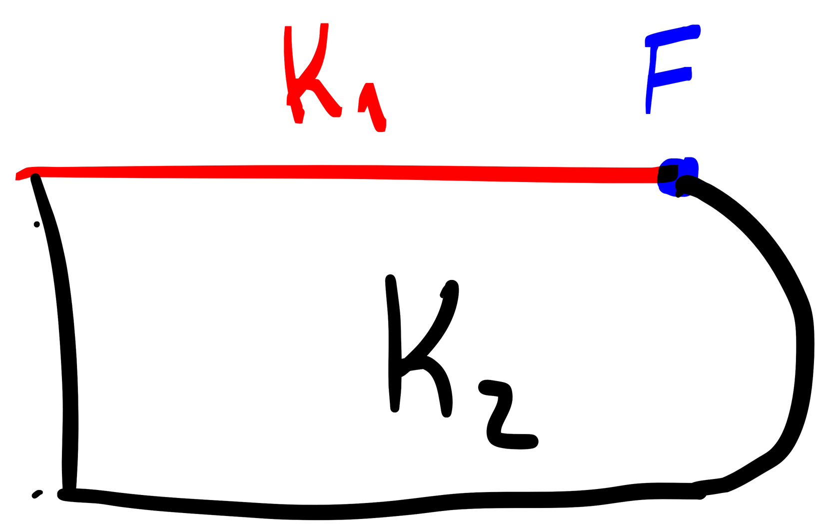
↳ Caras de K tienen dim, al ser subconjuntos convexos de K.

- Cada cara queda determinada por su generado, en particular para dos caras $F_1 \subsetneq F_2$, se tiene

$$\dim F_1 < \dim F_2$$

Siguiendo esto, diremos que un <u>vértice</u> de K es una cara 0-dimensional. Una <u>faceta</u> es una cara de codim 1.

- Si tenemos $F \subset K_1 \subset K_2$, con K_1, K_2 cjtos. convexos cerrados tal que F es cara de K_2, entonces F es cara de K_1. En general F cara de K_1 $\wedge$ K_1 cara de K_2 no dice nada entre F y K_2:



<u>Lema 4</u> Intersección de finitas caras es una cara (ó vacío).

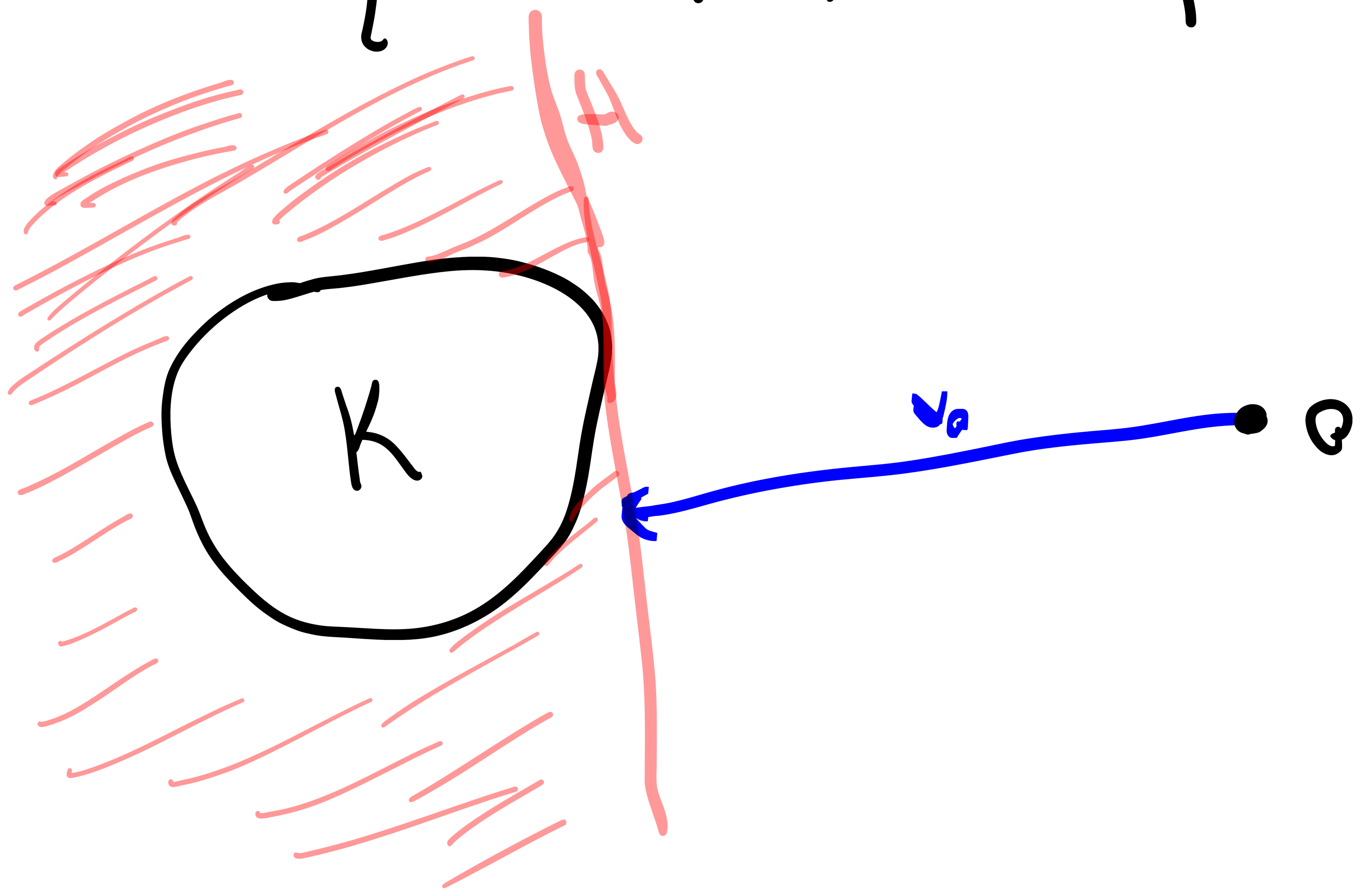
<u>dem.</u>

Conos convexos poliedrales

σ cono cerrado convexo.

- Recordar medio-espacio soporte. Para algún $u \in U$, $a \in \mathbb{R}$ se expresa

$$\{v \in V \mid \langle u, v\rangle \geq a\}$$



$\langle v_0, u\rangle = \underset{\text{mín}}{\underset{\sim}{a}}$, para algún u

- En el caso $K = \sigma$ es un cono, entonces $tv_0 \in \sigma$ $\forall t \geq 0$ $\Rightarrow ta \geq a$ $\forall t \geq 0$ $\Rightarrow a = 0$. Esto es, cualquier hiperplano soporte de σ es subespacio de V.

Def El <u>cono dual</u> de σ es:

$$\sigma^\vee := \{u \in U \mid \langle u, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \sigma\}$$

* Es un cono convexo cerrado de U.

- Denotaremos para $A \subset U$, denotaremos

$$A^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall u \in A\}$$

* Una cara de σ es de la forma $\sigma \cap u^\perp$, con $u \in \sigma^\vee$

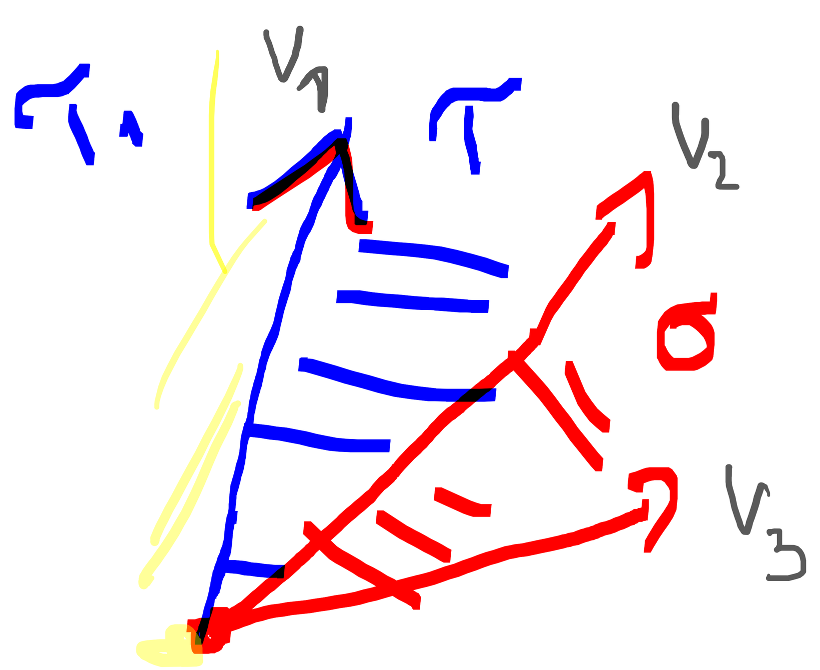
De la prop. 1 podemos asegurar:

Prop 2 Si σ es un cono convexo cerrado
$$(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$$
$\square$

Desde ahora asumiremos σ poliedral.
¿Podemos decir algo de $\sigma^\vee$?

Lema 5 Si τ es una cara de σ y τ_1 lo es de τ, entonces τ_1 es cara de σ.

Dem. $\tau = \sigma \cap u^\perp$, $\tau_1 = \tau \cap u_1^\perp$, $u \in \sigma^\vee$, $u_1 \in \tau^\vee$.
Escoger generadores $v_1, \dots, v_r$ de σ tal que los primeros $v_1, \dots, v_s \in \tau$.
como $\langle u, v_i \rangle > 0$, $i > s$ tomando t suf. grande queda
$\langle u_1 + tu, v_i \rangle > 0$, para tal i. $\Rightarrow$ $u_1 + tu \in \sigma^\vee$ por lo que
$$\sigma \cap (u_1 + tu)^\perp = \tau \cap u_1^\perp = \tau_1$$
$\square$



Deformación del plano que define τ, que siga def a τ_1

- Si τ es cara de σ tal que W es el generado (lineal), entonces $p : V \to V/W$ entrega correspondencia entre caras de $p(\sigma)$ y caras de σ que contienen a τ.

$$\tau \subset \tau' \subset \tau'' \Rightarrow p(\tau') \subset p(\tau'')$$

- Para estudiar las caras de σ reemplazaremos V con $\text{span}(\sigma)$.

↳ Afecta esto a $\sigma^\vee$? – No, $P(\sigma)^\vee \cong (\sigma^\vee \times V_W^*)$

Prop 3 Toda cara τ de σ es la intersección de las facetas que la contienen. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ son caras sin otra intermedia, $\dim \tau_1 = \dim \tau_2 - 1$. Si $\dim \tau = \dim \sigma - 2$, hay 2 facetas $\tau_i \supset \tau$.

Dem. Podemos asumir $V = \text{span}(\sigma)$. Salvo la proyección anterior que mantiene inclusiones podemos asumir $\tau = \{0\}$. Sean $v_1, \dots, v_r$ generadores no nulos. Y supongamos que $\dim \sigma \geq 2$. Tenemos.

$$\tau = \sigma \cap u^\perp \quad , u \in \sigma^\vee.$$

Podemos escoger $w \in U \setminus \mathbb{R}u$ tal que $\langle w, v_1 \rangle < 0$. Considerando luego

$$t = \max\{s > 0 \mid u + sw \in \sigma^\vee\}$$

entonces para algún i se tiene $v_i \in (u+tw)^\perp$. De esto $\sigma \cap (u+tw)^\perp$ es una cara propia de σ. i.e. Toda cara de codim 2 está contenida en una cara propia de σ. Por inducción en la codimensión, toda cara está contenida en una faceta. Tomando τ_2 como un cono tenemos que si $\tau_1 \subset \tau_2$ sin caras intermedias,

$$\dim \tau_1 = \dim \tau_2 - 1$$

Si por otro lado $\dim \sigma = 2$, $\tau = \{0\}$ entonces los generadores v_1, v_2 de σ definen 2 facetas que contienen a 0. Inducción comprueba lo pedido.

$\square$

Lema 6 Si $V = \text{span}(\sigma)$ entonces la unión de las facetas de σ es la clausura topológica de $\partial\sigma$. i.e. σ es la clausura de su interior.

- Si τ es una cara propia, está contenida en una faceta y en el hiperplano que la define. De aquí

$$\bigcup_{\tau \text{ cara}} \tau = \bigcup_{\tau \text{ faceta}} \tau \subseteq \overline{V / \sigma} \Rightarrow \bigcup_{\tau \text{ cara}} \tau \subset \partial\sigma \quad *$$

Es claro que si $x, y \in \sigma$ tal que no están en ninguna cara propia, entonces la línea que une x, y cumple la misma propiedad. Basta que si v cumple la propiedad anterior, entonces está en el interior de σ. Supongamos $\{v_m\}_m \subset \sigma^c$ tal que $v_m \to v$ cuando $m \to \infty$, por la prop 2 podemos considerar $u_m \in \sigma^\vee$ tq $\langle u_m, v_m \rangle < 0$. Asumiendo SPDG u_m en una esfera centrada en el origen, salvo subsecuencia $u_m \to u$, $m \to \infty$ con $u \in \sigma^\vee$ tal que $\langle u, v_m \rangle \leq 0$, de donde tomando límite $v \in \sigma \cap u^\perp$ vive en una cara propia $\times$. De esto $\partial\sigma \subset \bigcup_{\tau \text{ cara}} \tau$

* Dual es cerrado

$$\therefore \bigcup_{\tau \text{ cara}} \tau = \partial\sigma$$

$\square$

- Cuando $\text{span}(\sigma) \neq V$, podemos hablar de interior relativo. Los elementos en tal conjunto se pueden escribir:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \; : \; \{v_1, \dots, v_r\} \text{ generan y } \lambda_i > 0.$$

- Bajo los supuestos anteriores tenemos que cada faceta τ se puede expresar como

$$\tau = \sigma \cap u_\tau^\perp$$

donde u_τ está completamente determinado (salvo cte.)

Lema 7] Según lo anterior

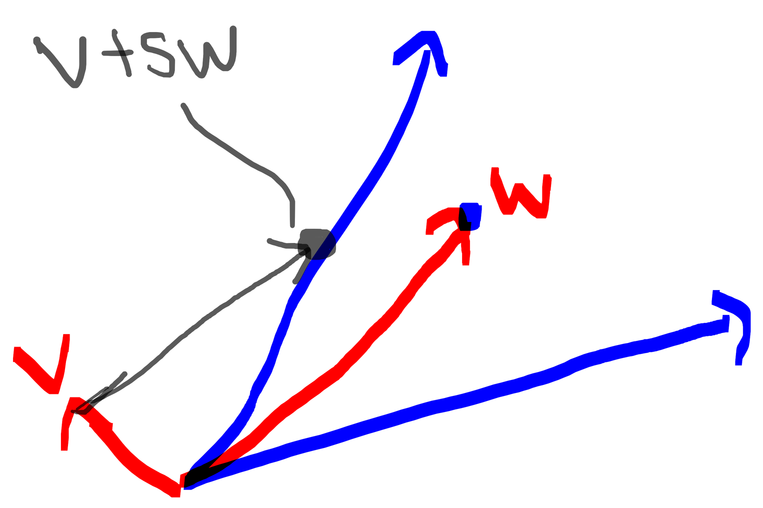
$$\sigma = \{ v \in V \mid \langle u_\tau, v \rangle \geq 0, \text{ para cada faceta } \tau \}$$

Dem. Si para algún v, $\langle u_\tau, v\rangle \geq 0$ para cada faceta τ.
En caso de que $v \notin \sigma$, tomar w en el interior de σ. Luego

$$t = \min\{s > 0 \mid v + sw \in \sigma\} \,*$$

y hay una faceta τ tal que $v + tw \in \tau$. Como $\langle u_\tau, v+tw\rangle = 0$
y $\langle u_\tau, v\rangle \geq 0$, $\langle u_\tau, w\rangle > 0$ tenemos una contradicc.

$\square$



— Desplazar v hacia el interior.

- Lo anterior asegura que los u_τ generan $\sigma^\vee$.

Prop 4 (Farkas) Si σ es un cono convexo poliedral, entonces también lo es $\sigma^\vee$

Dem. Claro según lo anterior, si σ genera V entonces tenemos una cantidad finita de vectores generadores de $\sigma^\vee$.

* Finitas facetas por restricc. de dimensiones

$\square$

- Se puede caracterizar de forma distinta un cono convexo poliedral.

- Si $v_1, \ldots, v_r$ generan σ, y a V como espacio, entonces para cada cjto:

$v_{i_1}, \dots, v_{i_{m-1}}$ $\quad$ * $\dim V = m$

De vectores LI, podemos construir $u \in U$ tq

$$\langle v_{i_j}, u \rangle = 0 \quad , \forall j$$

y si se cumple $\langle v, u \rangle \geq 0$ (ó $\leq$), entonces u corresponde a una faceta de σ

↳ Algoritmo para encontrar generadores u_τ de $\sigma^\vee$ y facetas τ de σ. (y caras de σ)

- Podemos pedir $u_\tau \in M$, si cada $v_i \in N$.
  i.e. dual de poliedral racional es poliedral racional.

- Si σ_1, σ_2 son conos poliedrales convexos. También lo son:

$$\sigma_1 + \sigma_2 := \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in \sigma_1, v_2 \in \sigma_2 \}$$

$$\sigma_1 \cap \sigma_2$$

Además

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^\vee = \sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee$$

$$(\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee = \sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee$$

Prop 5 Para cada cara τ de σ cono convexo Poliedral.

$$\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp$$

es una cara de $\sigma^\vee$. Esto da una biyección entre Caras de σ y $\sigma^\vee$, que Revierte inclusiones. Además:

$$(\tau^*)^* = \tau \quad , \quad \star \ \dim \tau + \dim \tau^* = \dim V$$

Dem. Si v está en el interior relativo de una cara τ de σ, entonces $\sigma^\vee \cap \tau^\perp = \sigma^\vee \cap v^\perp$; de lo contrario encontramos $u \in \tau^\perp$ tal que $\tau \cap u^\perp$ es una cara propia de τ que contiene a v. Esto asegura que τ^* es una cara de $\sigma^\vee$. Además, cualquier cara de $\sigma^\vee$ se construye de esta forma: Si $v \in \sigma$ determina $\sigma^\vee \cap v^\perp$, podemos tomar τ como la menor cara de σ que contiene a v. De aquí se concluye:

$\dim \tau$ pequeña $\Longleftrightarrow$ Libertad para escoger $u \in \sigma^\vee$ tq $\tau = \sigma \cap u^\perp$

$\hookrightarrow \quad \tau_1 \subset \tau_2 \Rightarrow \tau_2^* \subset \tau_1^*$

La correspondencia es sobreyectiva y $\tau \subset (\tau^*)^* \Rightarrow \tau^* = ((\tau^*)^*)^*$ al Revertir inclusiones, se concluye $\tau = (\tau^*)^*$ $\forall \tau$. Como $\sigma^* = \sigma^\perp$ se cumple $\star$ Para $\tau = \sigma$. Para τ genérico, tomar secuencias de caras entre τ y σ de cod. 1 (entre ellas), luego se revierten inclusiones y se preservan propiedades de dimensión, según lo visto.

$\square$

• Ver Ej de Dual.

- Notar que $\operatorname{span}(\tau^*) = \tau^\perp$. Está contenido y debe tener igual dim

- Si σ es racional podemos encontrar encontrar en el interior relativo de σ, un elemento de N. Además, si τ es una cara, podemos encontrar $u \in \sigma^\vee \cap M$ tal que $\tau = \sigma \cap u^\perp$ (Tomar u en interior relativo de τ^*)

- La cara mas pequeña de σ es $(\sigma^\vee)^* = \sigma \cap -\sigma$

- $\{0\}$ es una cara ssi σ es punteado

— Diremos que un rayo de σ, es una cara 1-dimensional.

- Si σ es cono convexo poliedral, con generadores $v_1, \dots, v_r$, entonces los rayos de σ son

$$\mathbb{R}_+ v_1, \dots, \mathbb{R}_+ v_r$$

* El cjto de generadores es único salvo escalares y reordenar.

↳ Considerar $\operatorname{Pos}(\{v_j \mid j \neq i\})$ permite construir $u' \in \sigma^\vee$ tq $\mathbb{R}_+ v_i = \sigma \cap u'^\perp$, i.e. efectivamente es una cara

Prop. 6 Si τ es una cara de σ, $u \in \sigma^\vee$ es tal que $\tau = \sigma \cap u^\perp$, entonces $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_+(-u)$

Dem. Basta ver que con $u' \in \tau^\vee$, con t suf. grande entonces $u' + tu \in \sigma^\vee$. Esto se sigue de la dem. del lema 5 □

Prop 7 Sean σ_1, σ_2 conos convexos poliedrales en V.
Si $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$ es una cara de ambos conos, entonces existe $u \in \sigma_1^\vee \cap \sigma_2^\vee$ tal que $\tau = \sigma_1 \cap u^\perp = \sigma_2 \cap u^\perp$.
Si σ_1, σ_2 son racionales, podemos tomar $u \in M$.

Dem. Considerar el cono convexo poliedral

$$\ast \quad \gamma = \sigma_1 - \sigma_2 := \{v_1 - v_2 \mid v_1 \in \sigma_1, v_2 \in \sigma_2\}$$

y tomar u en el interior rel. de $\gamma^\vee$ ($u \in M$ es elegible si σ_1, σ_2 son racionales), luego:

$$\gamma \cap u^\perp = \gamma \cap -\gamma = (\sigma_1 - \sigma_2) \cap (\sigma_2 - \sigma_1)$$

y como $u \in (\sigma_1 - \sigma_2)^\vee$, se tiene que $u \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$, en particular $\tau \subseteq u^\perp$.
Suponiendo ahora que $v \in \sigma_2 \cap u^\perp$, por $\ast$ podemos escribir $v = v_1 - v_2$, $v_1 \in \sigma_1, v_2 \in \sigma_2$.
Tenemos $v + v_2 \in \tau$, por lo que $v \in \tau$ al ser una cara de σ_2.
De ello $\sigma_2 \cap u^\perp = \tau$, y similarmente $\sigma_1 \cap u^\perp = \tau$.

Ver dibujo.

- Utilizamos que si $v, v_2 \in \sigma_1$ y $v_1 + v_2 \in \tau$ entonces ambos $v_1 v_2 \in \tau$ (similar para σ_2). Para un cono arbitrario $\tau \subseteq \sigma$, y utilizando el argumento para $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = \sigma$ se obtiene:

Prop 8 Si σ es un cono convexo poliedral, entonces $\tau \subset \sigma$ es una cara ssi es un cono convexo tal que

$$v_1, v_2 \in \sigma \wedge v_1 + v_2 \in \tau \Rightarrow v_1, v_2 \in \tau$$

Si σ es racional, es suficiente que esta condición se cumpla en $\sigma \cap N$.

Será importante para construcciones futuras:

Lema 8 (Carathéodory) Sea σ cono convexo poliedral generado por un cjto. T. Entonces σ es la unión de los conos generados por subconjuntos LI de T.

Dem. Basta ver que si $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$, con $\lambda_i > 0$ y $v_1, \dots, v_r$ no son LI entonces v puede expresarse como combinación lineal de $r-1$ de ellos, con coef. positivos. Tomemos una relación, con algún $a_i \neq 0$:

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$$

Salvo multiplicar por -1, tenemos que $a_j > 0$. Sea i tq $a_i > 0$ y $\lambda_i / a_i = \min\{\lambda_j / a_j \mid a_j > 0\}$

Tenemos por construcción $\lambda_j - \lambda_i \frac{a_j}{a_i} \geq 0$ $\forall j$. Luego reescribimos

$$v = \sum_{j \neq i} \left(\lambda_j - \lambda_i \frac{a_j}{a_i} \right) v_j$$

y todos los coefs son no negativos. $\square$

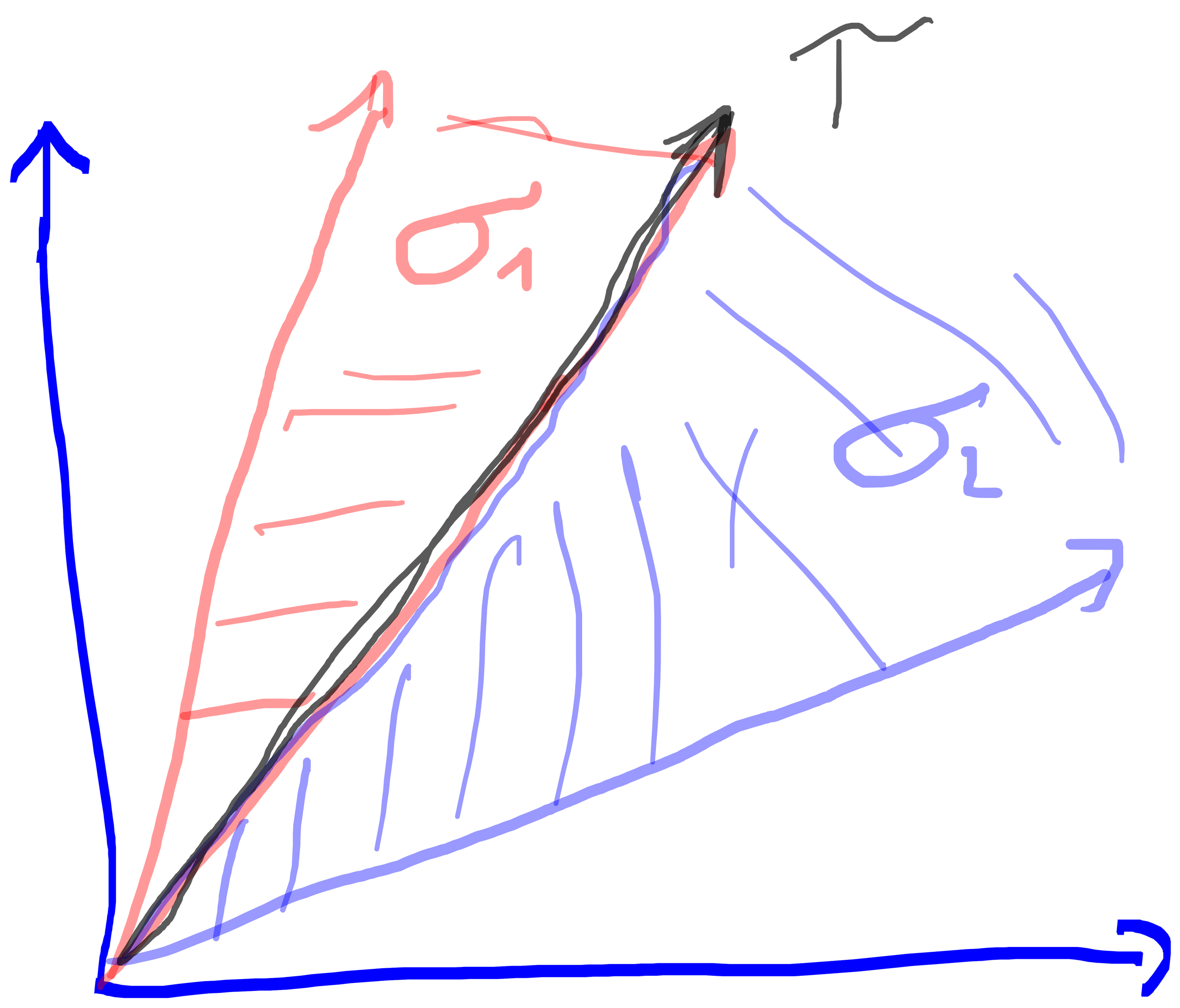
Conos y Semigrupos

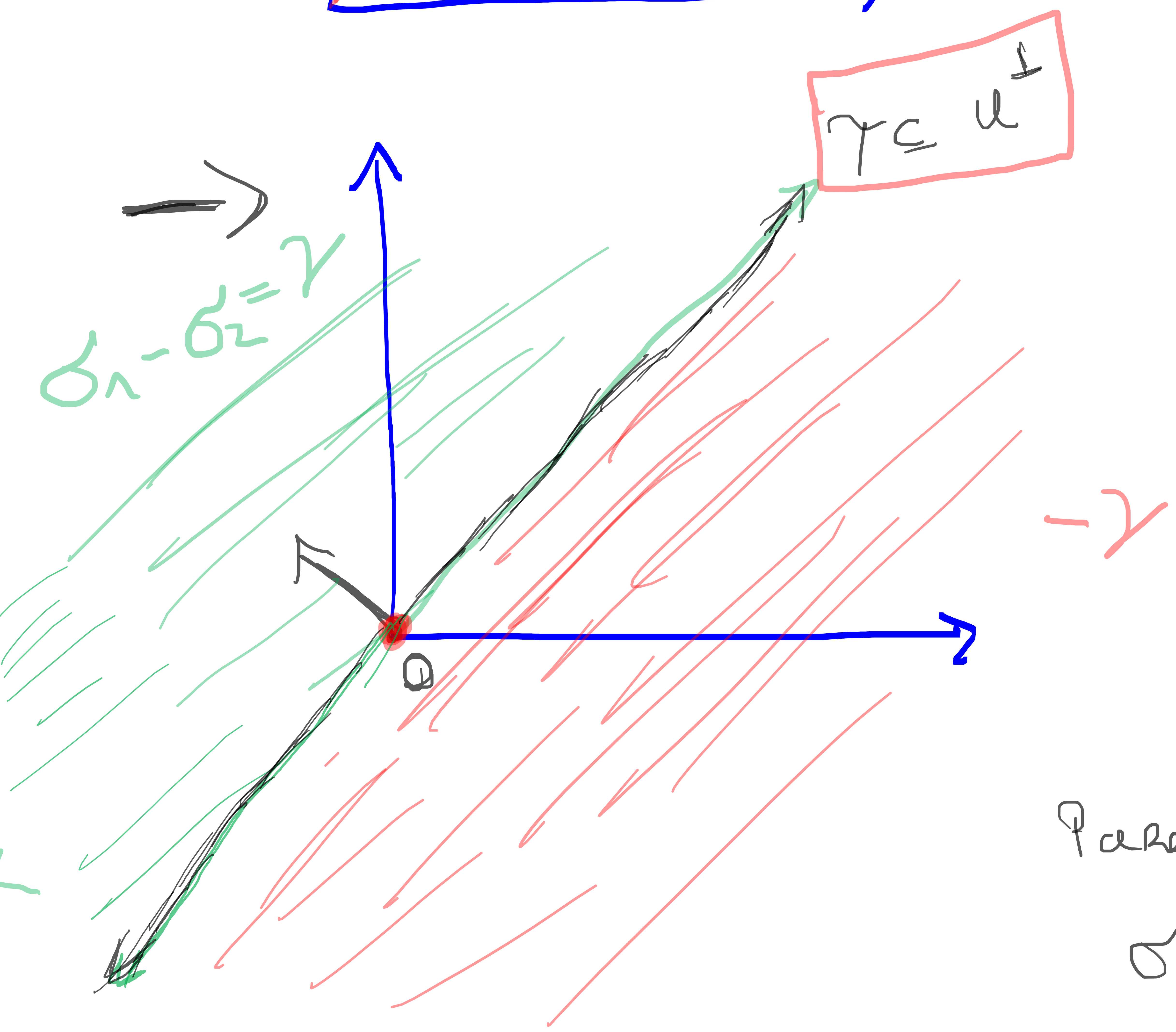
* Con las herramientas que tenemos podemos entender mejor la relación de estos objetos. Considerar

$$V = N_{\mathbb{R}} \quad , \quad S := \sigma \cap N$$

Dibujo Prop 7

$\mathbb{R}^2$

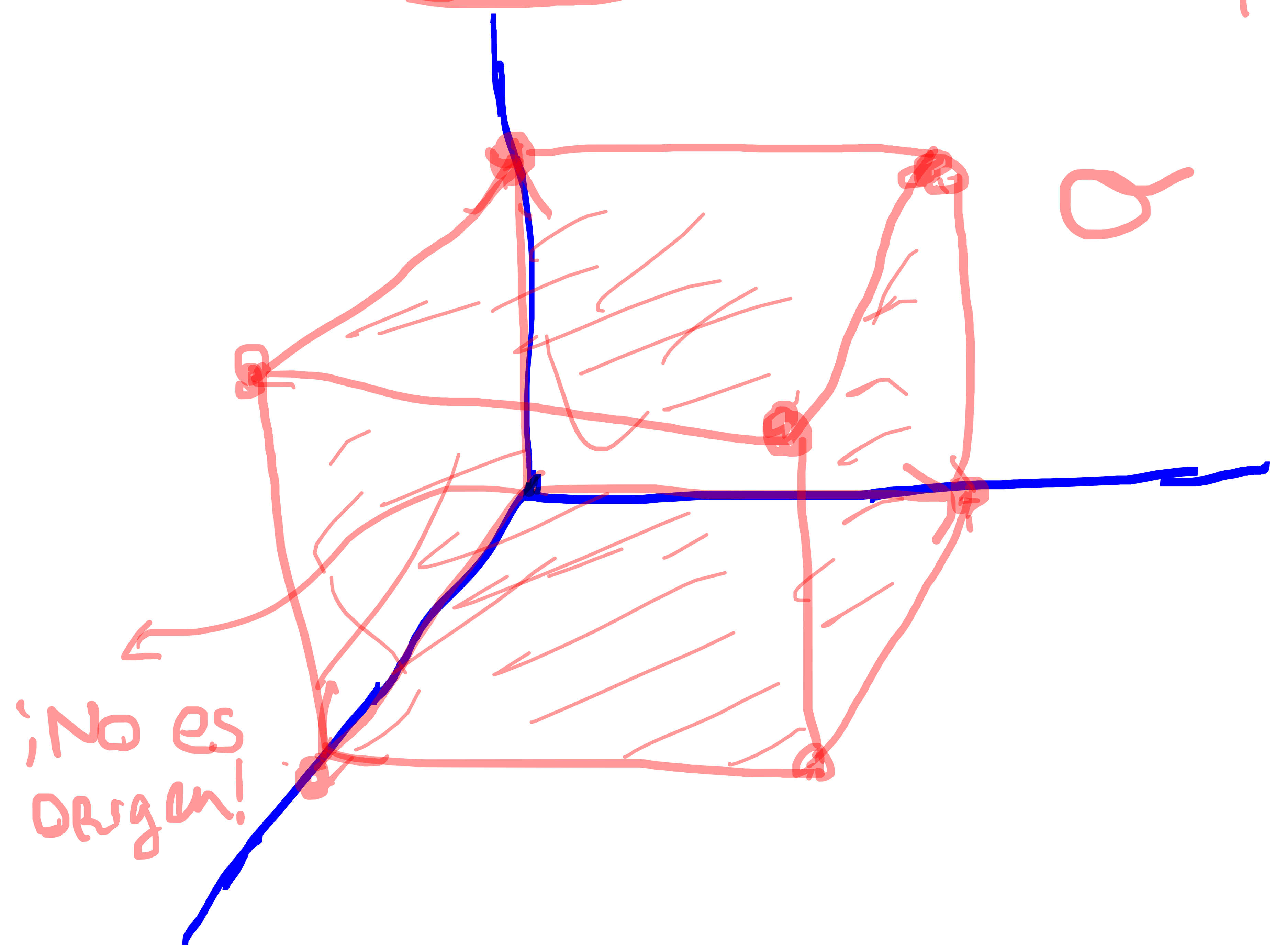




$u^\perp \cap \gamma = \gamma \cap -\gamma$

u define τ para ambos σ_1 y σ_2.

Problema: Considerar:



$\sigma \times 1 \subseteq \mathbb{R}^4$

Como generado por $[0,1]^3 \times 1$

Cuales son las caras del dual?

σ es generado por:

$v_1 = (0,0,0,1)$ $\quad v_2 = (0,0,1,1)$

$v_3 = (0,1,0,1)$ $\quad v_4 = (0,1,1,1)$

$v_5 = (1,0,0,1)$ $\quad v_6 = (1,0,1,1)$

$v_7 = (1,1,0,1)$ $\quad v_8 = (1,1,1,1)$

Hay 8 opciones de subconjuntos, las cuales definen ecuaciones del tipo:

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$: $v_{i_1}, \dots, v_{i_7} \in \operatorname{Ker} u$

y si $\langle u, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \sigma$; entonces u es un generador de $\sigma^\vee$.

Complicado!!

Como se ve um dual?