Seminario Baby Geometría Algebraica: Singularidades Tóricas

Javier Reyes

Pontificia Universidad Católica de Chile

8 de Octubre de 2020

Definición

Un anillo local $(R, \mathfrak{m})$ se dice **Cohen-Macaulay** (CM) si existe una secuencia regular en $\mathfrak{m}$ de largo $\dim(R)$. Un esquema (variedad) se dice CM si todos sus anillos locales son CM.

Se puede catacterizar esta propiedad usando cohomología local.

Resulta que todas las variedades tóricas serán CM.

Definición

Una resolución de singularidades de X es un morfismo birracional propio $\pi\colon \tilde{X} \to X$ donde $\tilde{X}$ es suave.
La variedad X se dice que tiene singularidades racionales si tiene una tal resolución tal que $\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \mathcal{O}_X$ y $R^i\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ para todo $i > 0$, en particular, X es normal.

Resulta que todas las variedades tóricas tienen singularidades racionales.

Un grupo algebraico lineal G es una variedad afin que también es grupo algebraico, es decir,

- $\cdot\colon G \times G \to G$ es morfismo
- $(\cdot)^{-1}\colon G \to G$ son morfismo

Por ejemplo las variedades $(k^*)^n$, $GL_n(k)$ o $SL_n(k)$.

Una representación finita de G es un k-espacio vectorial finito V y una acción algebraica $G \times V \to V$, donde cada g actúa como un elemento de $GL(V)$. Denotamos

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}$$

G es linealmente reductivo si toda representación finita V de G existe una función lineal $p\colon V \to V^G$ que es la identidad en V^G (i.e. un split) y tal que $p(gv) = p(v)$ para todo g y v. Si tal p existe, entonces es único.

Ejemplo: Los grupos clásicos GL_n, SL_n, Sp_{2n} son reductivos.

Ejemplo: Todo G finito tal que $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$ es linealmente reductivo. Si G actúa en V, podemos definir $p\colon V \to V^G$

$$p(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv$$

Ejemplo: Un toro $G = (k^*)^n$ es linealmente reductivo: Podemos ver la acción como un morfismo $\rho\colon G \to GL(V) \cong GL_n$:

$$\rho(t) = (p_{ij}(t))_{ij} \in GL_n, \quad p_{ij} \in k[x_1, \ldots, x_n], \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Sea $\mu \subseteq k^*$ el subgrupo de todas las raices de la unidad. Cada $g \in \mu^n \subseteq (k^*)^n$ tiene orden finito, por lo tanto $\rho(g)$ es diagonalizable.

Existe $P \in GL_n$ tal que $P^{-1}\rho(g)P$ es diagonal para cada $g \in \mu^n$. Como μ^n es Zariski denso en $(k^*)^n$, entonces $P^{-1}\rho(g)P$ es diagonal para cada $g \in (k^*)^n$.

Más en general, sea $A = \mathbb{Z}^d \times (\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z})$. Entonces

$$k[A] \cong k[\mathbb{Z}^d] \otimes k[t]/(t^{m_1} - 1) \otimes \ldots \otimes k[t]/(t^{m_r} - 1),$$

por lo tanto,

$$G = \mathrm{Spec}(k[A]) \cong (k^*)^d \times \mu_{m_1} \times \ldots \times \mu_{m_r}$$

donde $\mu_{m_i} = \mathrm{Spec}(k[t]/(t^{m_i} - 1))$. Si $\mathrm{char}(k) \nmid m_i$ entonces G es reducido y tiene estructura de grupo.

Ahora asumiendo G reducido (es decir, $\text{char}(k)$ no divide a la torsión de A), sea V una representación de G de dimensión n. Luego V es diagonalizable, es decir,

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

y existen caracteres (algebraicos) $\phi_i \colon G \to k^*$ tales que $gv = \phi_i(g)v$ para cada $v \in V_i$.

Caracteres

Un catacter $\phi\colon G \to k^*$ puede verse como un morfismo de variedades tóricas, por lo que le corresponde un morfismo de (semi)grupos $\mathbb{Z} \to A$. Como cada uno de estos morfismos está determinado por la imagen de $1 \in \mathbb{Z}$, entonces el grupo de caracteres de G es canónicamente isomorfo a A.

También, un punto cerrado $p \in G$ corresponde a un morfismo de anillos $u_p\colon k[A] \to k$, equivalentemente, un morfismo de (semi)grupos $u_p\colon A \to k^*$. La relación entre caracteres y puntos puede verse como

$$\phi_a(p) = u_p(a)$$

Sea G grupo linealmente reductivo actuando algebraicamente sobre una variedad X. Luego G actúa sobre $\mathcal{O}(X)$ por precomposición:

$$(g \cdot f)(x) = f(g(x)).$$

Se puede probar que $\mathcal{O}(X)$ se descompone en espacios V_i de dimensión finita G-invariantes. Como G es linealmente reductivo, existen splits $p\colon V_i \to V_i^G$ que pueden pegarse a un split

$$\rho_X\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)^G$$

Esta función se llama operador de Reynold, y resulta ser un morfismo de $\mathcal{O}(X)^G$-módulos.
OJO: En general no es un morfismo de anillos.

Algunos teoremas

Si G es un grupo linealmente reductivo actuando algebraicamente sobre una variedad afin X,

Hilbert

Entonces $\mathcal{O}(X)^G$ es finitamente generado.

Hochster-Roberts

Si X es suave, entonces $\mathcal{O}(X)^G$ es Cohen-Macaulay.

Boutot

Si $\mathrm{char}(k) = 0$ y X tiene singularidades racionales, entonces $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(X)^G)$ tiene singularidades racionales.

Definición importante!

Sean G y X como antes. La inclusión $\mathcal{O}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ induce un morfismo sobreyectivo

$$\pi\colon X \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}(X)^G).$$

Se llama el cuociente categórico de X por G y se denota por $X /\!\!/ G$.

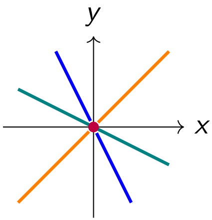
Ya que para cada $g \in G$, $\pi(gv) = \pi(v)$, esta construcción cuocienta las orbitas. . . el problema es que puede cuocientar más de una órbita.

Si $X /\!\!/ G$ coincide con el cuociente usual X/G, decimos que es un cuociente geométrico, cuociente GIT o simplemente cuociente bueno.

Ejemplos de Cuocientes malos

Sea $G = k^* = \mathrm{Spec}[t, t^{-1}]$ actuando sobre $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ de la manera

$$t \cdot (x, y) = (tx, ty)$$

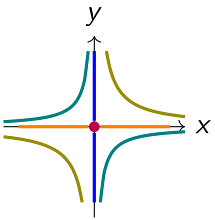


Las órbitas de G son el $\{(0, 0)\}$ y las rectas que pasan por el origen, sin el origen, luego podemos interpretar $X/G \sim \mathbb{P}^1 \cup \{P\}$.
Pero $k[x, y]^G = k$, luego $X /\!\!/ G = \mathrm{Spec}(k) = \{P\}$.

Ejemplos de Cuocientes malos

De nuevo, sea $G = k^* = \mathrm{Spec}[t, t^{-1}]$ actuando sobre $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ pero ahora de la manera

$$t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y)$$



Las órbitas de G son el $\{(0, 0)\}$ los ejes sin el origen, y las cónicas $xy = c$ para cada $c \in k^*$, así que podemos interpretar $X/G \sim k^* \cup \{P_1, P_2, P_3\}$. Pero $k[x, y]^G = k[xy] \cong k[z]$, luego $X /\!\!/ G \cong \mathrm{Spec}(k[z]) \cong \mathbb{A}^1$.

Ejemplo de Cuociente bueno (char(k) $\neq 2$)

Sea $G = \mu_2 = \mathrm{Spec}(k[t]/(t^2 - 1))$ $(= \{1, -1\})$ actuando sobre $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x, y])$ por

$$-1 \cdot (x, y) = (-x, -y)$$

Las órbitas son el origen $\{(0, 0)\}$ y pares de puntos $\{P, -P\}$.

Se puede verificar que $k[x, y]^G = k[x^2, xy, y^2] \cong k[a, b, c]/(ac = b^2)$.

Proposición

Sean G, X son como antes, $\pi \colon X \to X/\!\!/G$ y $x, y \in X$.
Entonces $\pi(x) = \pi(y)$ si y solo si la las clausuras de Gx y Gy se intersectan.
En consecuencia, el cuociente $X/\!\!/G$ es geométrico si y solo si las órbitas Gx son cerrados para cada $x \in X$.

En particular, si G es finito, el cuociente es siempre geométrico.

- $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral racional punteado.
- $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ es semigrupo integral y finitamente generado, saturado en M.
- $U_\sigma := \mathrm{Spec}(k[S_\sigma])$ la variedad tórica afin asociada a σ,
- $T_N \hookrightarrow U_\sigma$ el toro definido por $T_N := Spec(k[M])$.
- $G = \mathrm{Spec}(k[A])$, donde A es un grupo abeliano finitamente generado, $\mathrm{char}(k) \nmid |\,\mathrm{Tor}(A)|$.

Una acción tórica de G sobre U_σ es un morfismo de grupos algebraicos $G \to T_N$ (el cual induce una acción $G \times U_\sigma \to U_\sigma$).
Nos reduciremos al caso en que σ es de dimensión maximal, de modo que $\sigma^\vee$ es punteado.
Esto no pierde generalidad al estudiar singularidades: si $\mathrm{span}(\sigma) = W$, $\dim W = n'$, entonces $\sigma^\vee \cong \sigma_W^\vee \times \mathbb{R}^{n-n'}$, por lo que $U_\sigma \cong U_{\sigma_W} \times (k^*)^{n-n'}$.

Proposición

Si G tiene un acción tórica sobre U_σ, entonces $U_\sigma /\!\!/ G$ tiene una estructura natural de variedad tórica.

El morfismo $P\colon G \to T_N$ debe corresponder a un morfismo $p\colon M \to A$. La acción de G sobre U_σ se factoriza por la acción de T_N sobre σ:

$$\begin{array}{rccccc} \varphi\colon & G \times U_\sigma & \to & T_N \times U_\sigma & \to & U_\sigma \\ & (g, x) & \mapsto & (P(g), x) & \mapsto & P(g)x \end{array}$$

que a nivel álgbras,

$$\begin{array}{rccccc} \Phi\colon & k[S_\sigma] & \to & k[M] \otimes k[S_\sigma] & \to & k[A] \otimes k[S_\sigma] \\ & \chi^u & \mapsto & \chi^u \otimes \chi^u & \mapsto & \chi^{p(u)} \otimes \chi^u \end{array}$$

Queremos entener $\mathcal{O}(X)^G$.

$f \in \mathcal{O}(X)^G = k[S_\sigma]^G$ ssi el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G \times U_\sigma & \xrightarrow{\varphi} & U_\sigma \\ \big\downarrow \mathrm{pr}_2 & & \big\downarrow f \\ U_\sigma & \xrightarrow{f} & k \end{array}$$

el cual se traduce al diagrama

$$\begin{array}{ccc} k[A] \otimes k[S_\sigma] & \xleftarrow{\Phi} & k[S_\sigma] \\ \big\uparrow 1\otimes\mathrm{id} & & \big\uparrow {f \atop \uparrow \atop t} \\ k[S_\sigma] & \xleftarrow{f \leftarrow\!\shortmid t} & k[t] \end{array}$$

es decir, el diagrama conmuta si y solo si $1 \otimes f = \Phi(f)$.

Escribiendo $f = \sum_{u \in S_\sigma} c_u \chi^u$, entonces la igualdad $1 \otimes f = \Phi(f)$ se traduce a

$$\sum_{u \in S_\sigma} c_u 1 \otimes \chi^u = \sum_{u \in S_\sigma} c_u \chi^{p(u)} \otimes \chi^u$$

$$\sum_{u \in S_\sigma} c_u (\chi^{p(u)} - 1) \otimes \chi^u = 0$$

Lo que ocurre ssi $c_u = 0$ para cada $u \notin \ker(p)$.
Definiendo $L = \ker(p \colon M \to A)$, obtenemos $\mathcal{O}(X)^G = k[S_\sigma \cap L]$.
L es un subreticulado de M, y el morfismo $L \hookrightarrow M$ induce un morfismo de duales $N \to L^* = \operatorname{Hom}(L, \mathbb{Z})$. Si τ es la imagen de σ por este morfismo, entonces es un cono y $S_\sigma \cap L = \tau^\vee \cap L$.

Entonces $U_\sigma /\!\!/ G = \operatorname{Spec}(k[\tau^\vee \cap L]) = \operatorname{Spec}(k[S_\tau]) = U_\tau$.

- $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $G = \mu_2 = \mathrm{Spec}(k[A])$
- $\sigma = \mathbb{R}^+ e_1 + \mathbb{R}^+ e_2$, $X = U_\sigma = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[\chi^{\hat{e}_1}, \chi^{\hat{e}_2}])$
- La acción $P\colon G \to T_N$

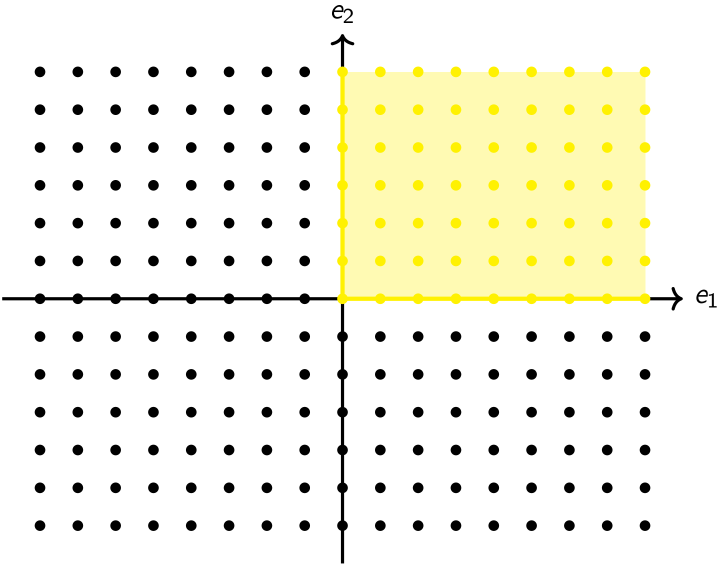
$$P(t) = (t, t), \quad \varphi(-1, (x, y)) = (-1, -1) \cdot (x, y) = (-x, -y)$$

A nivel de álgebras, $P^*\colon k[M] \to k[A]$ satisface

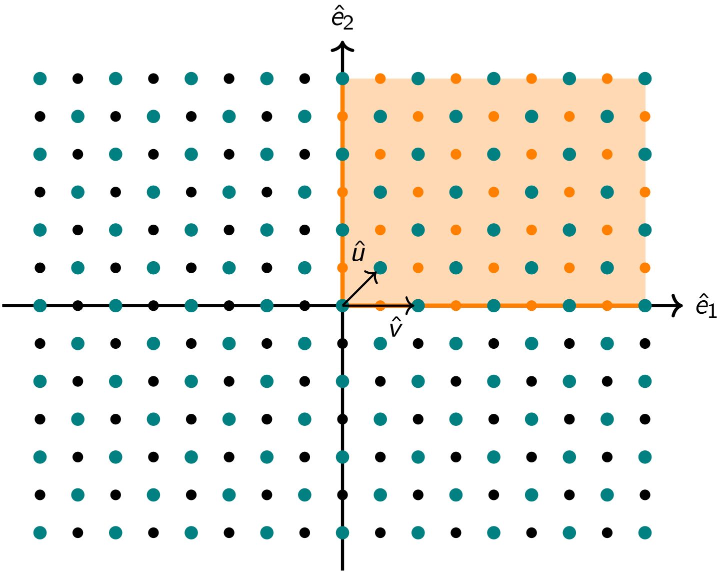
$$P^*(\chi^{\hat{e}_1}) = \chi^1, \quad P^*(\chi^{\hat{e}_2}) = \chi^1, \quad 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$$

$p\colon M \to A$ viene dado por $p(a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2) = a + b \mod 2$, cuyo kernel es $L = \{(a, b) \in M \mid a + b \equiv 0 \mod 2\}$.
Una base de L es $\hat{u} = (1, 1)$ y $\hat{v} = (2, 0)$. Si u y v es la base dual, entonces el morfismo $N \to L^*$ viene dado por $e_1 \mapsto (1, 2)$ y $e_2 \mapsto (1, 0)$, por lo tanto el cono τ es $\mathbb{R}^+(1, 2) + \mathbb{R}^+(1, 0)$

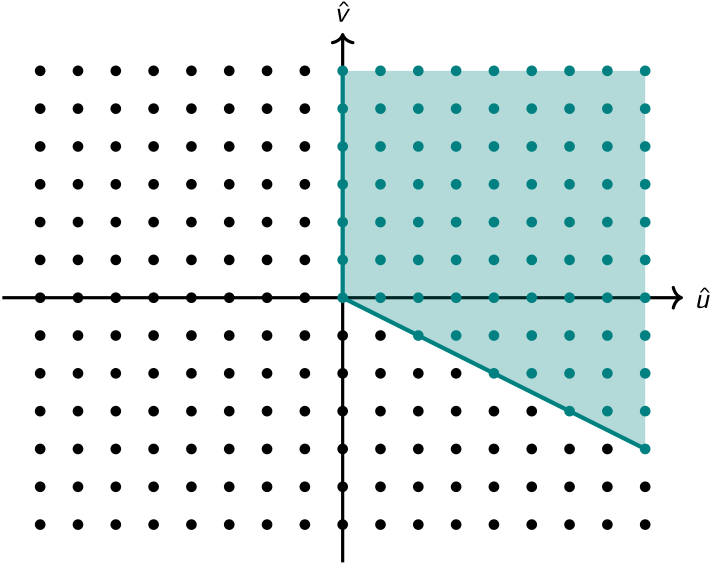
N



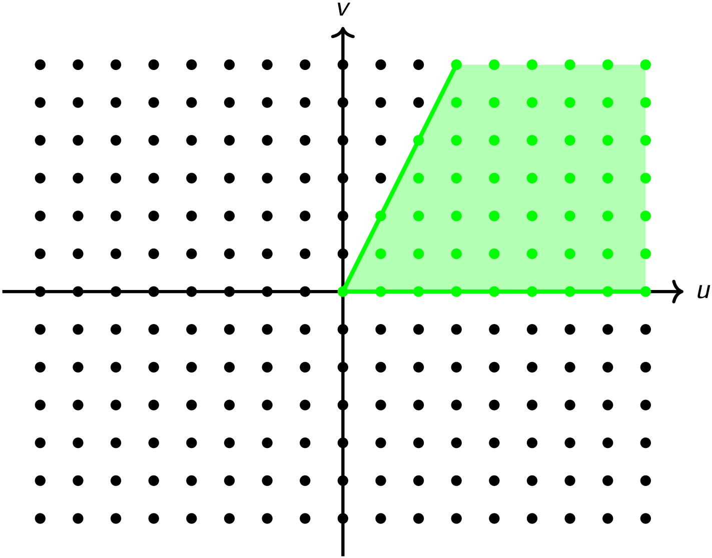
M



L



L^*



Ejemplo

Más generalmente, si $G = \mathrm{Spec}(k[A])$ actúa sobre $V = \mathbb{A}^n$ visto como espacio vectorial, podemos diagonalizar $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ donde G actúa en V_i mediante algún caracter $\phi_i \colon G \to k^*$, que como vimos antes, es lo mismo a tomar $a_i \in A$

Escogiendo una base de V acorde a su descomposición, el morfismo $G \to V$ se traduce a a un morfismo de grupos $p \colon \mathbb{Z}^n \to A$ dado por $p(e_i) = a_i$.
Usando esa base, escribimos $V = \mathbb{A}^n \cong \mathrm{Spec}(k[\mathbb{N}^n])$.
De la proposición anterior, $\mathbb{A}^n /\!\!/ G \cong \mathrm{Spec}(k[\mathbb{N}^n \cap \ker(p)])$.

Proposición

Bajo cierta condición sobre $\mathrm{char}(k)$, y σ como antes, entonces U_σ es canónicamente isomorfa a un cuociente categórico $\mathbb{A}^d /\!\!/ G$ dada por una acción tórica $G \to \mathbb{A}^d$.

Sean $\tau_1, \ldots, \tau_d$ los rayos de σ, y v_i generadores de los semigrupos $\tau_i \cap N \cong \mathbb{N}$. Como asumimos que los v_i generan $N_\mathbb{R}$, entonces el morfismo

$$\iota \colon M \to \mathbb{Z}^d, \quad \iota(u) = (\langle u, v_1 \rangle, \ldots, \langle u, v_d \rangle)$$

es inyectivo. Sea $p \colon \mathbb{Z}^d \to A := \mathbb{Z}^d / \iota(M)$ su cokernel y $G = \mathrm{Spec}(k[A])$. Aquí asumimos $\mathrm{char}(k) \nmid |\mathrm{Tor}(A)|$.

Recordando la proposición anterior, obteníamos que $\mathcal{O}(\mathbb{A}^d)^G = k[\mathbb{N}^d \cap L]$, donde el reticulado L era el kernel del morfismo $\mathbb{Z}^d \to A$. Este es precisamente el rol que cumple M por construcción.
Viendo M como subreticulado de $\mathbb{Z}^d$ mediante ι, su intersección con $\sigma^\vee$ es $\iota^{-1}(\mathbb{N}^d)$, y por la forma en que se escogieron los v_i, este conjunto es exactamente S_σ.
Eso basta para verificar que

$$\mathbb{A}^d /\!\!/ G = \operatorname{Spec}(k[x_1, \ldots, x_d]^G) = \operatorname{Spec}(k[\iota^{-1}(\mathbb{N}^d)]) = \operatorname{Spec}(k[S_\sigma]) = U_\sigma$$

Para enredarse más. . .

El homomorfismo p induce un morfismo de grupos algebraicos $G \hookrightarrow (k^*)^d \hookrightarrow \mathbb{A}^d$. Si $u\colon A \to k^*$ corresponde a un punto en G, entonces la acción de G en $\mathbb{A}^d$ viene dada por

$$u \cdot (x_1, \dots, x_d) = (u(p(e_1))x_1, \dots, u(p(e_d))x_d)$$

Si σ no genera $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$, ya vimos que $U_\sigma = U_{\sigma'} \times (k^*)^n$ para algún n. En este caso, $U_\sigma = \mathbb{A}^d \times (k^*)^n /\!\!/ G$, donde G actúa trivialmente en la parte $(k^*)^n$.

Definición

Una variedad tórica U_σ se dice simplicial si σ está generado por vectores linealmente independientes.

Por ejemplo, todo σ punteado de dimensión 2.

Resulta que en el caso simplicial, G es finito, lo que implica que $\mathbb{A}^n /\!\!/ G$ es un cuociente geométrico.

Una variedad X sobre $\mathbb{C}$ tiene singularidades cuocientes si localmente (topología analítica) las singularidades son cuocientes de una variedad suave por un grupo finito.

En particular, toda singularidad de superficies tóricas es cuociente.

Proposición

Escribiendo U_σ como $\mathbb{A}^d \times (k^*)^r /\!\!/ G$, entonces el cuociente es geométrico si y solo si σ es simplicial

Basta ver el caso en que no es simplicial, y nos reducimos al caso $r = 0$.
Supongamos que σ es generado por d vectores, donde $d > n = \dim \sigma$.
El origen es siempre un punto fijo de G, por lo tanto en $\mathbb{A}^d / G$, el origen tiene una preimagen.
Esto no puede pasar en $U_\sigma \cong \mathbb{A}^d /\!\!/ G$, ya que $\dim U_\sigma = n$ y $\dim \mathbb{A}^d = d$.

Ejemplo

Sea σ generado por $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ y $v_4 = (1,1,-1)$.
$\sigma^\vee$ está generado por $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$
Entonces $\mathrm{Spec}(k[S_\sigma]) \cong \mathrm{Spec}(k[a,b,c,d]/(ad-bc))$.
El morfismo $\iota\colon M \to \mathbb{Z}^4$ es:

$$\iota(u_1,u_2,u_3) = (u_1,u_2,u_3,u_1+u_2-u_3)$$

Su cokernel A es isomorfo a $\mathbb{Z}$, el morfismo siendo

$$p(x,y,z,w) = w+z-x-y$$

Luego $G \cong \mathrm{Spec}(k[\mathbb{Z}]) \cong (k^*)$ y la acción viene dada por

$$t\cdot(x,y,z,w) = (t^{-1}x, t^{-1}y, tz, tw)$$

nn

La acción es

$$t \cdot (x, y, z, w) = (t^{-1}x, t^{-1}y, tz, tw)$$

$k[x, y, z, w]^G = k[xz, xw, yz, yw] \cong k[a, b, c, d]/(ad - bc)$.

El morfismo $p\colon \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^4/\!\!/G \cong k[a, b, c, d]/(ad - bc)$ es:

$$p(x, y, z, w) = (xz, xw, yz, yw)$$

La preimagen del origen es $\mathbb{V}(x, y) \cup \mathbb{V}(z, w)$, que no es la orbita del origen en $\mathbb{A}^4$.