Abanicos y Variedades Tóricas

Jerson Caro

December 4, 2020

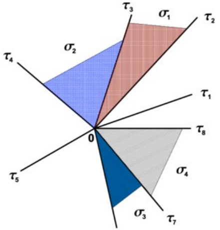
Variedades Tóricas correspondientes a un Abanico

Definición (Abanico)

Un **abanico** Δ en un retículo N es una collección finita de conos punteados (racionales,poliedrales, convexos) en $N_{\mathbb{R}}$ tal que

1. Cada cara de un cono en Δ es un también cono de Δ.
2. La intersección de cualquier dos conos en Δ es una cara de ambos.

El **soporte** $|\Delta|$ de un abanico Δ es la unión de todos los conos en el abanico.



A un cono σ le asociamos la variedad tórica afín $U_\sigma := \mathrm{Spec}(k[S_\sigma])$. Los siguientes hechos nos permitirán construir una variedad $X(\Delta)$ a partir de un abanico dado.

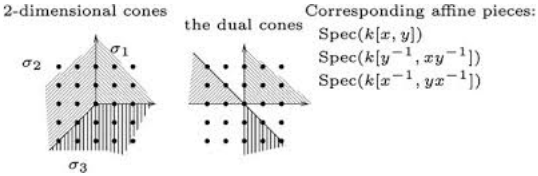
- Si $\tau \leq \sigma$, tenemos que $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$, lo que induce un morfismo $U_\tau \to U_\sigma$.
- Si suponemos que dos caras τ_1, τ_2 de un cono σ en Δ. Entonces podemos identificar canonicamente $U_{\tau_1} \cap U_{\tau_2}$ con $U_{\tau_1 \cap \tau_2}$ en U_σ. **[Supongamos que $\tau_i = \sigma \cap u_i^\perp$ con $u_i \in M \cap \sigma^\vee$. Tenemos que $\tau_1 \cap \tau_2 = \sigma \cap (u_1 + u_2)^\perp$, y también $U_{\tau_1} \cap U_{\tau_2}$ es el subconjunto abierto afín definido por $\chi^{u_1}\chi^{u_2}$]**.
- Si σ_1, σ_2 son dos conos en Δ, como $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara de los dos conos, podemos identificar U_τ con un conjunto abierto de los U_{σ_i}. Así podemos definir $X = X(\Delta)$ como la unión de estos U_σ, teniendo en cuenta estas identificaciones en la intersección.
- El toro $T_N = U_{\{0\}}$ es embebido en cada U_σ. Si $\tau \leq \sigma$, la inclusión $U_\tau \subset U_\sigma$ es compatible con la acción de T, por lo que T actúa sobre X.

Ejemplo

Sea N cociente del retículo con base $e_0, \ldots, e_n$ por el subretículo generado por $e_0 + \cdots + e_n$. Para cada i con $0 \leq i \leq n$, sea σ_i el cono generado por $e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots e_n$. El conjunto de los σ_i (con sus caras) define un abanico Δ. Tenemos entonces que

$$M = \left\{ \sum_{i=0}^{n} u_i e_i^* : \sum_{i=0}^{n} u_i = 0 \right\}$$

Si establecemos $t_i = \chi^{e_i^*}$, entonces $k[\sigma_i^\vee \cap M] = k[t_0/t_i, \ldots, t_n/t_i]$. Esto muestra que $X(\Delta) = \mathbb{P}^n$. Mas aún, la acción del toro $(k^*)^{n+1}/k^*$ sobre $\mathbb{P}^n$ es inducida por $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \cdot [x_0 : \cdots : x_n] = [\lambda_0 x_0 : \cdots : \lambda_n x_n]$. El caso de $\mathbb{P}^2$ es:



Morfismos de Abanicos y sus variedades asociadas

Supongamos que $\phi : N' \to N$ un morfismo de retículos. Si Δ' y Δ son abanicos respectivos, decimos que ϕ nos da un **morfismo de abanicos** si para cada cono σ' de Δ' existe un cono σ en Δ tal que $\phi(\sigma') \subset \sigma$. Si se cumplen estas condiciones tenemos los siguientes homomorfismos de álgebras:

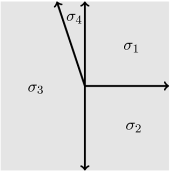
$$k[\sigma^\vee \cap M] \to k[\sigma'^\vee \cap M'], \chi^u \mapsto \chi^{\phi_*(u)},$$

los cuales definen un morfismo de variedades $U_{\sigma'} \to U_\sigma \subset X(\Delta)$ independientes de σ.

Así se define un morfismo de variedades $\phi_* : X(\Delta') \to X(\Delta)$. En particular, si tomamos σ' y σ los conos triviales nos da un morfismo de grupos algebraicos $T_{N'} \to T_N$. Mas aún, ϕ_* es compatible con las acciones correspondientes vía estos morfismos. Cuando un morfismo $f : X(\Delta') \to X(\Delta)$ cumple esta condición decimos que f es un **morfismo de variedades tóricas**.

Ejemplos

En este ejemplo, los vectores generadores son $e_1, e_2, -e_2, -e_1 + ae_2$.



Aquí $X(\Delta)$ es cubierto por los abiertos

$$U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]) \qquad U_{\sigma_2} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y^{-1}]) \qquad U_{\sigma_3} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-a}y^{-1}])$$
$$U_{\sigma_4} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^{a}y])$$

Vemos que el pegado de U_{σ_1}, con U_{σ_2} es dado por $U_{\{e_1\}} = \text{Spec}(k[x, y, y^{-1}])$.
Finalmente notemos que el homomorfismo $\phi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ definido por $\phi(v_1, v_2) = v_1$ induce un morfismo $\phi_* : X(\Delta) \to \mathbb{P}^1$.

Oribitas y subvariedades Invariantes: Caso afín

Sea σ un cono punteado en un retículo N de rango n:

- La acción de T_N sobre U_σ tiene solo finitas orbitas y estan en correspondencia con las caras de $\sigma^\vee \cap M$ **cada una de estas caras son de la forma** $\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$ **para alguna cara** τ **de** σ. Notamos que el grupo generado por $\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M$ es $\tau^\perp \cap M$. Denotamos por O_τ la orbita correspondiente, tenemos también que $O_\tau = \mathrm{Spec}(k[M \cap \tau^\perp])$.
- La clausura $V(\tau)$ de O_τ es $\mathrm{Spec}(k[\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M])$, y tenemos una inclusión $V(\tau) \to U_\sigma$ inducida por $g : k[\sigma^\vee \cap M] \to k[\sigma^\vee \cap M \cap \tau^\perp]$, definido por $g(\chi^u) = \chi^u$ si $u \in \sigma^\vee \cap M \cap \tau^\perp$ y $g(\chi^u) = 0$ de lo contrario. Además
$$U_{\sigma'} = \amalg_{\tau \leq \sigma'} O_\tau, \qquad V(\tau) = \amalg_{\tau' \geq \tau} O_{\tau'}.$$

Ejemplo

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y sea σ el cono generado por $e_1, \ldots, e_n$. Tenemos entonces que $U_\sigma = \mathbb{A}^n$. Si τ es una cara de σ generada por $\{e_i | i \in I\}$ entonces $V(\tau)$ es definido por el ideal $\langle t_i | i \in I \rangle$, mientras que las orbitas O_τ es

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \,|x_i = 0 \text{ para } i \in I \text{ y } x_i \neq 0 \text{ para } i \notin I\}$$

Oribitas y subvariedades Invariantes: Caso global

En el caso general tendremos que $X(\Delta) = \amalg_{\tau \in \Delta} O_\tau$ usando el hecho que τ_1 y τ_2 son conos distintos en Δ, entonces $O_{\tau_1} \neq O_{\tau_2}$. Además de esto tenemos que las subvariedades irreducibles invariantes es igual a algún $V(\tau)$ (Usamos este hecho en U_σ para algún σ con $V \cap U_\sigma \neq \emptyset$.)

Cada orbita O_τ es un toro, y por tal razón tiene un punto distinguido (la identidad) que denotaremos por x_τ. Si τ es una cara de σ, entones x_τ pertenece a U_σ y este es dado por el morfismo de semigrupos $x_\tau : \sigma^\vee \cap M \to k$, definido por $x_\tau(u) = 0$ si $u \notin \tau^\perp$ y $x_\tau(u) = 1$ de otro modo.

Finalmente, notamos que O_τ es es cerrrado si y sólo si τ es un cono maximal de Δ, y los puntos fijos por la acción son los puntos x_τ donde τ es un cono en Δ de dimensión $n = \text{rank}(N)$. La siguiente proposición nos permite relación los puntos distinguido en un morfismo de variedades tóricas.

Proposición 1

Sea $\phi_* : X(\Delta') \to X(\Delta)$ elmorfismo inducido de variedades. Si τ' es un cono en Δ' y si τ es el cono mas pequeño en δ que contiene a $\phi(\tau')$, entonces $\phi_*(x_{\tau'}) = x_\tau$. De aquí $\phi_*(O_{\tau'}) \subset O_\tau$ y $\phi_*(V(\tau')) = V(\tau)$.

Proposición 2

Sea $\phi : N' \to N$ un morfismo de retículos y sea $f : T_{N'} \to T_N$ el morfismo de toros correspondiente.

1. Si ϕ es sobreyectivo, entonces existe un toro $T_{N''}$ y un isomorfismo $T_{N'} \cong T_N \times T_{N''}$ tal que f corresponde a la proyección sobre el primer factor. En particular, f es sobreyectivo y tiene fibras conexas.
2. Si ϕ es inyectivo y $\mathrm{coker}(\phi)$ es finito, entonces f es finito, sobreyectivvo con $\deg(\phi)$ es igual al orden del cokernel.
3. Si ϕ es inyectivo y $\mathrm{coker}(\phi)$ es libre, entonces f es una inmersión cerrada.
4. Cualquier f admite una descomposición

$$T_{N'} \xrightarrow{f_1} T_{N_1} \xrightarrow{f_2} T_{N_2} \xrightarrow{f_3} T_N \ ,$$

donde f_1 es como en (1), f_2 como en (2) y f_3 como en (3).

Observación

Notamos que el punto (1) de la anterior Proposición muestra que el ejemplo 2, nos da una superficie birracional a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Vamos a demostrar que entonces que esta superficie es isomorfa sobre $\mathbb{P}^1$ a la superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_a = \mathbb{P}(O_{\mathbb{P}^1} \oplus O_{\mathbb{P}^1}(a))$ y para ello basta demostrar que esta contiene una curva con autointersección $-a$.
Observamos que la cara $\tau = \{e_2\}$ determina una curva $V(\tau)$. Vemos que $V(\tau) \cap U_{\sigma_1}$ es $t^u = 0$ donde u es el generador de $\sigma_1^\vee \cap M$ que no se anula en τ, por lo que es e_2^*. Luego es la ecuación $y = 0$. Haciendo lo mismo para $V(\tau) \cap U_{\sigma_4}$ vemos que esta está definida por la ecuación $x^a y = 0$, De aqui obtenemos que $D_\tau \cong \mathbb{P}^1$ (pues $V_0 = V(\tau) \cap U_{\sigma_1} = \mathrm{Spec}(k[x])$ y $V_1 = V(\tau) \cap U_{\sigma_4} = \mathrm{Spec}(k[x^{-1}])$). Finalmente notamos que en el abierto $V_0 \cap V_1$ tiene ecuación local $x^a y / y = x^a$ y de aquí que $N = O(-V(\tau)) = O(-a)$, con lo que la autointersección de esta curva es $-a$.

Demostración

1. Si ϕ es sobreyectivo, entonces tenemos un isomorfismo $N' \cong N \times N''$ donde $N'' = \ker(\phi)$. Así esto induce un un isomorfismo $T_{N'} \cong T_N \times T_{N''}$ y f corresponde a la proyección en la primera componente.
2. Si ϕ es inyectivo y su cokernel finito, tenemos una sucesión exacta $0 \to M \to M' \to L \to 0$, donde $\#L = \#\mathrm{coker}(\phi)$. Dada la inclusión podemos escoger una base $e_1, \ldots, e_n$ para M' tal que $a_1 e_1, \ldots, a_n e_n$. Para ciertos enteros positivos $a_1, \ldots, a_n$. y de aquí $\#L = \prod a_i$. Tenemos así que sobre los toros asociados a los retículos f esta definido por $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1^{a_1}, \ldots, t_n^{a_n})$, lo que muestra que este es un morfismo finito, sobreyectivo de grado $\deg(f) = \prod a_i$.
3. Si ϕ es inyectivo con cokernel libre tenemos un morfismo sobreyectivo $M \to M'$, así que f es una inmersión cerrada.
4. Para un morfismo arbitrario ϕ se puede factorizar como sigue $N \to N_1 \to N_2 \to N'$, donde N_1 es la imagen de ϕ y N_2 es tal que N_2/N_1 es la torsión de N/N_1.

Corolario 1

Sea $\phi : N' \to N$ un homomorfismo de latices y sea $f : T_{N'} \to T_N$ el morfismo de toros correspondiente.

1. f es una inmersión cerrada si y sólo si ϕ es un monomorfismo split.
2. f es sobreyectivo si y sólo si es dominante. Este es el caso si y sólo si el cokernel de ϕ es finito.

Corolario 2

Suponga que coker(ϕ) es finito. Entonces $\phi_*(O_{\tau'}) = O_\tau$ y de aquí que la clausura de $\phi_*(V(\tau'))$ es $V(\tau)$. Si asumimos que ϕ_* es propio, entonces $\phi_*(V(\tau')) = V(\tau)$.

Este ultimo viene del hecho que $O_{\tau'} \to O_\tau$ es inducido por el homomorfismo de grupos $N(\tau') \to \mathbb{N}(\tau)$ el cual tiene cokernel finito.

Subgrupo a 1-parámetro

Un subgrupo a 1-parámetro del toro T_N corresponde a un elemento $v \in N$. Denotamos por $f_v : k^* \to T_N$ el subgrupo a 1-parámetro correspondiente a v, entonces $f_v = (\phi_v)_*$, donde $\phi_v : \mathbb{Z} \to N$ es dado por $\phi_v(1) = v$. Tenemos el siguiente resultado

Proposición 3

El subgrupo a 1-parámetro f_v puede ser extendido a un morfismo $\widetilde{f_v} : \mathbb{A}^1 \to X(\Delta)$ si y sólo si v pertenece a $|\Delta|$. Más aún, si σ es cono mas pequeño en Δ que contiene a v, se tiene $\widetilde{f_v}(0) = x_\sigma$.

Observamos pues que esto nos da una manera de recuperar el abanico Δ desde la acción del toro sobre $X(\Delta)$.

Gracias.