Abanicos y variedades tóricas II

Juan Pablo Zúñiga

Seminario baby de geometría algebraica

22/10/2020

Introducción:

En la charla pasada se definió lo que es la variedad tórica asociada a un abanico Δ dentro de un retículo N. De igual forma, se definió el morfismo de variedades tóricas inducido por un homomorfismo $\varphi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$. Allí se discutieron aspectos de como calcular las órbitas de la acción y sus respectivas subvariedades invariantes. Así mismo, se estudiaron propiedades de los homomorfismos entre retículos que se transfieren a los homomorfismos de variedades.

En la charla de hoy se estudiarán algunas propiedades intrínsecas a las variedades algebraicas, tales como la completitud. Veremos que estas solamente dependen del abanico Δ.

En un principio esto resulta sorprendente, pues todas estas propiedades que en un principio son complicadas de demostrar, se traducen a comprobaciones sencillas sobre la geometría del abanico. No obstante, esto se esclarecerá con la demostración de que la categoría de variedades tóricas y de pares (N, Δ) son equivalentes.

Recordando de la charla pasada, dado un retículo N y Δ un fan sobre N los subgrupos uniparamétricos $g : k^* \to T_N$ vienen inducidos por homomorfismos $\varphi_v : \mathbb{Z} \to N$ donde $\varphi_v(1) = v$. Es decir, $g = (\varphi_v)_*$ para algún $v \in N$.

Para demostrar los resultados de esta charla es necesario determinar cuando un subgrupo uniparamétrico f_v permite extenderse a un morfismo $\widetilde{f_v} : \mathbb{A}^1 \to X(\Delta)$. Afortunadamente, para variedades tóricas hay un criterio bien sencillo.

Proposición 1:

El grupo uniparamétrico f_v admite una extensión $\widetilde{f_v} : \mathbb{A}^1 \to X(\Delta)$ si y solo si $v \in |\Delta|$. En caso de que esto suceda, al considerar el cono mínimo que contenga a v, sea este σ, se nota que $\widetilde{f_v}(0) = x_\sigma$.

Dem: Si suponemos que dicho $\widetilde{f_v}$ existe, vemos $\widetilde{f_v}(0) \in U_\sigma$ para algún $\sigma \in \Delta$. Lo cual nos permite deducir que $\widetilde{f_v}(\mathbb{A}^1) \subseteq U_\sigma$.

Lo anterior nos permite obtener el siguiente diagrama conmutativo a nivel de k-álgebras

$$\begin{tikzcd} k[\sigma^{\vee} \cap M] \arrow[r, "\exists\beta"] \arrow[d, "i^*"] & k[\mathbb{N}] \arrow[d, "i^*"] \\ k[M] \arrow[r, "\alpha"] & k[\mathbb{Z}] \end{tikzcd}$$

Donde por la definición de f_v, se tiene que $\alpha(\chi^u) = t^{\langle u,v \rangle}$. Por las inclusiones observamos que $\beta(k[\sigma^{\vee} \cap M]) \subseteq k[\mathbb{N}]$, lo cual implica que si tomamos $u \in S_\sigma$ se debe tener que $\langle u, v \rangle \geq 0$. Por los resultados de geometría convexa, deducimos que $v \in \sigma$. La otra implicación se tiene automáticamente porque cada uno de estos pasos son un si y solo si.

Si σ es el mínimo cono que contiene a v, se tiene que $v \in \sigma^o$. Para calcular $\widetilde{f_v}(0)$ usamos la interpretación $f_v(z) \in Hom(S_\sigma, k)$ donde $f_v(z)(u) = z^{\langle u,v \rangle}$. Con esto notamos que $\widetilde{f_v}(0) = \lim_{z \to 0} f_v(z)$. Si tomamos $u \in \sigma^{\vee} \setminus \sigma^{\perp}$, vemos que $\langle u, v \rangle \geq 0$ y si $u \in \sigma^{\perp}$ se tiene $f_v(z) = 1$. Al tomar el límite, notamos eventualmente que $\widetilde{f_v}(0) = x_\sigma$. $\square$

Subgrupos uniparamétricos:

La anterior proposición permite recuperar Δ a partir de la acción del toro sobre $X(\Delta)$. Esto se hace explícito en el siguiente corolario.

Corolario 1:

Sean $\tau \subseteq \sigma$ dos conos punteados en $N_{\mathbb{R}}$. El morfismo inducido $g : U_\tau \to U_\sigma$ es una inmersión abierta si y solo si τ es una cara de σ.

Dem: La dirección $\Leftarrow$ se tiene inmediatamente por construcción.
$\Rightarrow$ Suponemos que g es una inmersión abierta. Para demostrar que τ es cara de σ, probamos que para $v_1, v_2 \in \sigma \cap N$ tal que $v_1 + v_2 \in \tau$ se sigue que $v_1, v_2 \in \tau$.

Al tomar los morfismos $f_{v_1}, f_{v_2}, f_{v_1+v_2}$, por la Proposición 1 notamos que estos admiten extensiones $\widetilde{f_{v_1}}, \widetilde{f_{v_2}}, \widetilde{f_{v_1+v_2}} : \mathbb{A}^1 \to U_\sigma$. Así mismo, sobre T_N se cumple $f_{v_1} f_{v_2} = f_{v_1+v_2}$, lo cual por la extensión de la acción a U_σ nos lleva a

$$\widetilde{f_{v_1+v_2}}(0) = \widetilde{f_{v_1}}(0)\widetilde{f_{v_2}}(0)$$

donde $\widetilde{f_{v_1+v_2}}(0) \in g(U_\tau)$. Al tener que $g(U_\tau)$ es estable bajo la acción del toro deducimos que $\widetilde{f_{v_1}}(0), \widetilde{f_{v_2}}(0) \in g(U_\tau)$. Así vemos que f_{v_1} y f_{v_2} se extienden a morfismos $\mathbb{A}^1 \to U_\tau$ y por lo tanto $v_1, v_2 \in \tau$.

$\square$

Propiedades intrínsecas de variedades tóricas

Aún así la construcción de una variedad tórica parece ser muy abstracta, estas poseen propiedades estructurales que se pueden determinar de forma bastante concreta. En nuestro caso estudiaremos la completitud de una variedad tórica.

Mediante un resultado llamado "Valuative criterion of properness" (el cual abreviaremos con V.C) es posible determinar si una variedad tórica $X(\Delta)$ es completa basado solamente en $|\Delta|$.

V.C versión baby

Una variedad algebraica X sobre $\mathbb{C}$ es completa si y solo si para todo morfismo $f : Spec(\mathbb{C}((t)) \to X$ existe un único levantamiento $g : Spec(\mathbb{C}[[t]]) \to X$ tal que $f = g \circ i_*$ en donde i es la inclusión $\mathbb{C}[[t]] \hookrightarrow \mathbb{C}((t))$.

Propiedades intrínsecas de variedades tóricas

Aún así la construcción de una variedad tórica parece ser muy abstracta, estas poseen propiedades estructurales que se pueden determinar de forma bastante concreta. En nuestro caso estudiaremos la completitud de una variedad tórica.

Mediante un resultado llamado "Valuative criterion of properness" (el cual abreviaremos con V.C) es posible determinar si una variedad tórica $X(\Delta)$ es completa basado solamente en $|\Delta|$.

V.C versión baby

Una variedad algebraica X sobre $\mathbb{C}$ es completa si y solo si para todo morfismo $f : Spec(\mathbb{C}((t)) \to X$ existe un único levantamiento $g : Spec(\mathbb{C}[[t]]) \to X$ tal que $f = g \circ i_*$ en donde i es la inclusión $\mathbb{C}[[t]] \hookrightarrow \mathbb{C}((t))$.

Si $X(\Delta)$ es una variedad completa y f_v un subgrupo uniparamétrico. Con la inclusión $j : \mathbb{C}[t, t^{-1}] \to \mathbb{C}((t))$ observamos que $f_v \circ j_*$ es un morfismo de $Spec(\mathbb{C}((t))$ a $X(\Delta)$. Por $V.C$ este se levanta a un morfismo $g : Spec(\mathbb{C}[[t]]) \to X(\Delta)$, el cual si lo restringimos a $\mathbb{A}^1$ nos da una extensión $\widetilde{f_v}$.

Puesto que en el caso anterior $v \in N$ era general, por la Proposición 1 llegamos a que $N_{\mathbb{R}} \subseteq |\Delta|$. Lo sorprendente es que la contraria también es cierta.

Proposición 2

Si $X(\Delta)$ es variedad tórica con reticulo N, $X(\Delta)$ es completa si y solo si $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$.

Dem: Suponemos que $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$ y hacemos $R = \mathbb{C}[[t]]$, $K = \mathbb{C}((t))$. Para $X(\Delta)$ irreducible, es suficiente mostrar el V.C aplicado a un morfismo $f : Spec(K) \to X(\Delta)$ que cumpla $im(f) \subseteq U$ con U abierto. En nuestro caso vamos a suponer que $U = T_N$.

El morfismo $f : Spec(K) \to T_N$ induce el homorfismo $f^* : \mathbb{C}[M] \to K$, el cual a su vez se restringe a un homomorfismo de grupos $\alpha : M \to K^*$. Si tomamos la valuación $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ dada por $\nu(\sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i) = k$ con $a_k \neq 0$, se observa que $\nu \circ \alpha \in M^*$ siendo $M^* \cong N$. Lo cual por hipótesis implica que $\nu \circ \alpha \in \sigma$ para algún $\sigma \in \Delta$.

Hacemos $\beta = \nu \circ \alpha$. Notamos que la condición $\beta \in \sigma$ es equivalente a tener que $\beta \in (\sigma^{\vee})^{\vee}$, lo cual es lo mismo a tener que β sea no negativo sobre S_σ. Esto es suficiente para asegurar que existe un levantamiento de f, pues la no negatividad de β sobre S_σ permite factorizar $f_*|_{\mathbb{C}[S_\sigma]}$ a través de R. Esquemáticamente, la situación corresponde a:

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] & K \\
\mathbb{C}[S_\sigma] \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Mediante el $V.C$ concluimos que $X(\Delta)$ es completa. $\square$

De forma más general, en las notas de Mustata se muestra que:

Proposición:

Si $\varphi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$ es un morfismo fans, entonces φ_* es propio si y solo si $\varphi^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|$.

Ejemplo:

Un ejemplo fundamental de morfismo propio es el blow-up.

Sea N un retículo y Δ un abanico en N. Suponemos que hay un cono $\sigma \in \Delta$ generado por $v_1, \ldots, v_n$ base de N. Si hacemos $v_0 = \sum_{i=1}^{n} v_i$ y reemplazamos σ por los conos generados por los conjuntos $\{v_0, \ldots, v_n\}$ no conteniendo a $\{v_1, ..., v_n\}$, esto da lugar a un abanico Δ'. La identidad en N induce el mapa propio $(id_N)_* : X(\Delta') \to X(\Delta)$ el cual justamente coincide con ser el blow-up de $X(\Delta)$ en el punto distinguido x_σ.

Si suponemos que $N = \mathbb{Z}^n$, $\sigma = conv(e_1, ..., e_n)$ y $\Delta = \{\tau \leq \sigma\}$ vemos que $U_\sigma = \mathbb{A}^n$. Ahora, si definimos σ_i como el cono generado por $e_0, ..., \hat{e}_i, ..., e_n$, notamos que $X(\Delta')$ está cubierto por los U_{σ_i}. Haciendo los calculos vemos que σ_i^v está generado por $e_i^*, e_1^* - e_i^*, ..., e_n^* - e_i^*$, lo cual nos permite ver que

$$\mathbb{C}[U_{\sigma_i}] = \mathbb{C}\left[x_i, \frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right]$$

para cada $1 \leq i \leq n$.

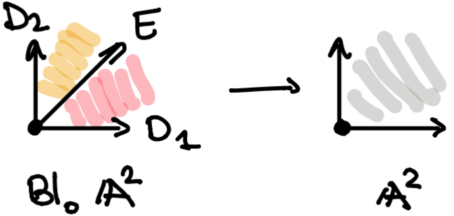
Ejemplo:

El blow-up de $\mathbb{A}^n$ en el origen corresponde a

$$\widetilde{\mathbb{A}^n} = \{(x,[y]) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : x_i y_j = x_j y_i\}$$

Este tiene una cubierta por abiertos afines $U_i = \{(x,[y]) \in \widetilde{\mathbb{A}^n} : y_i \neq 0\}$, en los cuales cada punto $(x,[y])$ cumple que $x_j = x_i \frac{y_j}{y_i}$. Por lo tanto, U_i tiene coordenadas x_i y $\frac{x_j}{x_i}$ para $j \neq i$, viendo así que $\mathcal{O}(U_i) = \mathbb{C}[U_{\sigma_i}]$ y consecuentemente que $U_i \cong U_{\sigma_i}$. Los pegados entre los abiertos son todos compatibles, lo cual nos permite deducir que $\widetilde{\mathbb{A}^n} \cong X(\Delta')$.

Para el caso de $n = 2$, el morfismo de abanicos es:



Equivalencia categórica

Ahora nuestros esfuerzos se canalizarán en demostrar que la categoría de variedades tóricas es equivalente a la categoría de pares (N, Δ) donde Δ es un abanico en N. Así como hicimos en las primeras charlas mostramos que el functor $F(N, \Delta) = X(\Delta)$ es escencialmente sobre y fully-faithful.

Inicialmente citamos el siguiente lema de Sumihiro.

Lema:

Si T es un toro actuando en una variedad normal X, entonces existe una cubierta de abiertos afines $\{U_i\}_{i=1}^r$ de X tal que U_i es estable bajo la acción de T y $T \subseteq \bigcap_{i=1}^r U_i$.

Ahora procedemos a demostrar lo siguiente:

Teorema 1:

Sea X una variedad separada que posee un toro denso T cuyo producto se extiende a una acción sobre X. Entonces existe un par (N, Δ) tal que $X \cong X(\Delta)$ y su restricción induce $T \cong T_N$.

Equivalencia categórica

Dem: Por el lema podemos tomar dicha cubierta de X con abiertos afines $U_1, ..., U_r$. Si tomamos N como el grupo de subgrupos uniparamétricos de T, notamos que $T \cong T_N$. Por lo desarrollado en el capítulo 1, sabemos que para cada U_i existe un semigrupo $S_i \subseteq M = Hom(N, \mathbb{Z})$ tal que $U_i \cong Spec(k[S_i])$ y que $S_i^{gp} = M$.

Dado que suponemos X normal, cada uno de dichos semigrupos es saturado en M, por consiguiente, para cada i existe un cono punteado y racional σ_i en N tal que $S_i = \sigma_i^{v} \cap M$. De esto se sigue que $U_i = U_{\sigma_i}$.

Sabiendo que la intersección de abiertos afínes es afín, tenemos que $U_i \cap U_j \cong Spec(k[S_{\tau_{ij}}])$ para algún cono τ_{ij}. Probamos que $\tau_{ij} = \sigma_i \cap \sigma_j$. La inclusión $\tau_{ij} \subseteq \sigma_i \cap \sigma_j$ se tiene por definición, pues $U_{\tau_{ij}} \subseteq U_i, U_j$ implica $\tau_{ij} \subseteq \sigma_i, \sigma_j$. La contraria es mucho más interesante.

Si $v \in \sigma_i \cap \sigma_j$ por la Proposición 1, el morfismo $f_v : k^* \to T_N$ tiene extensiones $f_1 : \mathbb{A}^1 \to U_i$, $f_2 : \mathbb{A}^1 \to U_j$. Al ser X separable, tenemos que $eq(f_1, f_2)$ es cerrado, lo cual implica que $f_1(0) = f_2(0)$. Con esto notamos que $f_1(\mathbb{A}^1) \subseteq U_i \cap U_j$ y por consiguiente $v \in \tau_{ij}$.

Para concluir la prueba, usamos el Corolario 1 para construir el abanico. La inclusión $\tau_{ij} \subseteq \sigma_i \cap \sigma_j$ muestra que τ_{ij} es cara de σ_i y σ_j. Si tomamos los conos $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ junto a todas sus caras, notamos que estas forman un abanico Δ en N, el cual cumple que $X \cong X(\Delta)$ donde los isomorfismos respetan los pegados. $\square$

Solamente queda faltando el paso de que dicho functor sea fully-faithful.

Teorema 2

Sean Δ' y Δ abanicos en retículos N y N' respectivamente. Para todo morfismo de variedades tóricas $h : X(\Delta') \to X(\Delta)$ existe un único morfismo $\varphi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$ tal que $h = \varphi_*$.

Dem: Si tomamos la restricción de h a $T_{N'}$ obtenemos un morfismo de grupos algebraicos $g : T_{N'} \to T_N$. Por lo desarrollado en el Capítulo 1, sabemos que existe $\varphi : N' \to N$ homomorfismo de grupos tal que $\varphi_* = g$. Si demostramos que φ es un morfismo de pares ya estaríamos listos, pues φ_* y h coincidirían en un abierto denso, lo cual por ser separados $X(\Delta')$ y $X(\Delta)$ implica $h = \varphi_*$. La unicidad viene del hecho de que el mapa es único a nivel de toros.

Sea $\sigma' \in \Delta'$, puesto que h preserva órbitas, existe $\sigma \in \Delta$ tal que $h(\mathcal{O}_{\sigma'}) \subseteq \mathcal{O}_{\sigma}$, con esto mostramos que $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$. Si $v' \in \sigma'$, sabemos por la Proposición 1 que el subgrupo uniparamétrico $f'_v : k^* \to T_{N'}$ admite una extensión $\widetilde{f_{v'}} : \mathbb{A}^1 \to X(\Delta')$ con $\widetilde{f_{v'}}(0) = x_{\sigma'}$.

Observamos que $g \circ f_{v'}$ es el subgrupo uniparamétrico de $\varphi(v')$. Este admite la extensión $h \circ \widetilde{f_{v'}}$, lo cual por la Proposición 1 implica que $\varphi(v') \in |\Delta|$ y que $h(\widetilde{f_{v'}(0)}) = x_\tau$, donde τ es el cono más pequeño en Δ que contiene a $\varphi(v')$.

Esto muestra que $x_\tau \in \mathcal{O}_\sigma$ y consecuentemente que $\mathcal{O}_\tau \subseteq \mathcal{O}_\sigma$. A partir de esto deducimos que $\tau = \sigma$ y así $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$. $\square$

Queda demostrado que ambas categorías son equivalentes, por lo tanto, a nivel global es exactamente igual estudiar variedades tóricas a pares (N, Δ).