Ejemplos tóricos a traves de abanicos

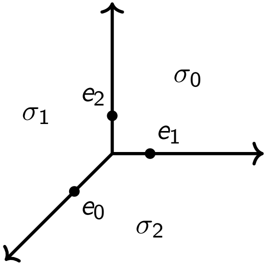
Javier Reyes

Pontificia Universidad Católica de Chile

29 de Octubre de 2020

Espacio Proyectivo

Partimos con $N_{\mathbb{R}}$ como el cuociente de $\mathbb{R}^{n+1}$ por $e_0 + \ldots + e_n = 0$ y consideramos Δ definido por los conos generados por subconjuntos de n elementos de $\{e_0, \ldots, e_n\}$.
El reticulado N será la imagen de $\mathbb{Z}^{n+1}$ en el cuociente.
Cada uno de estos conos son no singulares por tanto $X(\Delta)$ es suave.



Viendo los conos duales,

$$\begin{aligned} S_{\sigma_k} &= \left\{ \sum_{i=0}^{n} u_i e_i^* \mid \sum_{i=0}^{n} u_i = 0 \text{ y } u_i \geq 0 \text{ para todo } i \neq k \right\} \\ &= \langle e_0^* - e_k^*, e_1^* - e_k^*, \ldots, e_n^* - e_k^* \rangle \end{aligned}$$

Si denotamos $\chi_k = \chi^{e_k^*}$, tenemos entonces

$$k[S_{\sigma_k}] = k\left[\frac{\chi_0}{\chi_k}, \ldots, \frac{\chi_n}{\chi_k}\right] \cong k[X_0, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, X_n]$$

Y así podemos verificar que $X(\Delta)$ es precisamente $\mathbb{P}^n$.

Recordamos que

$$M = \left\{ \sum_{i=0}^{n} u_i e_i^* \mid \sum_{i=0}^{n} u_i = 0 \right\} = \left\langle e_i^* - e_j^* \mid 0 \leq i, j \leq n \right\rangle$$

Por lo tanto el toro T_N viene dado por

$$\begin{aligned} T_N &= \mathrm{Spec}\left(k\left[\frac{\chi_i}{\chi_j} \mid 0 \leq i, j \leq n \right] \right) \\ &= \left\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in (k^*)^{n+1} \right\} / (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \sim (t\lambda_0, \dots, t\lambda_n) \end{aligned}$$

y de ese modo, la acción en U_{σ_k} es

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n)(X_0, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_n) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_k} X_0, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_k} X_n \right)$$

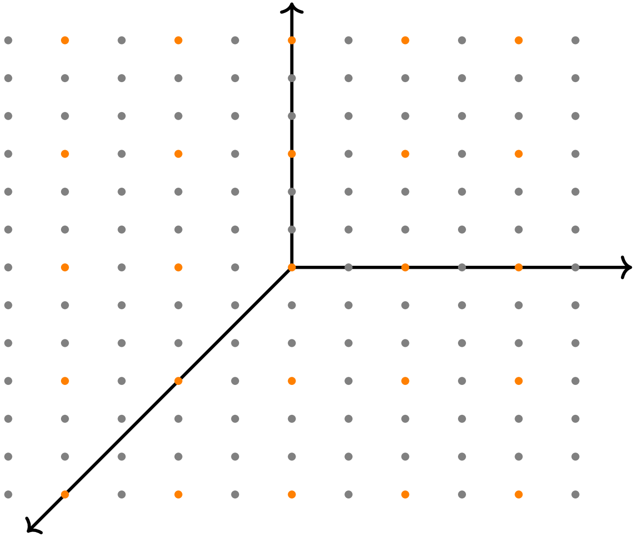
En coordenadas proyectivas, la acción se pega del modo usual.

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n)[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda_0 x_0 : \dots : \lambda_n x_n]$$

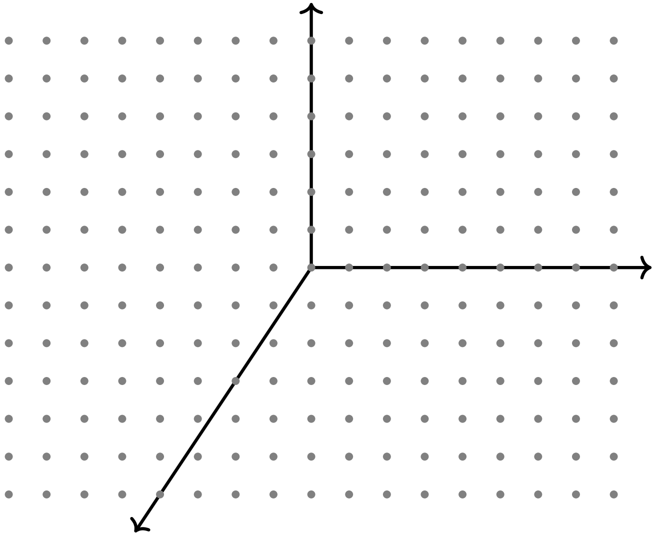
Espacio Proyectivo Pesado

Más generalmente, sean $d_0, \ldots, d_n$ enteros positivos. Consideramos $N_{\mathbb{R}}$ como el cuociente de $\mathbb{R}^{n+1}$ por $e_0 + \ldots + e_n = 0$, pero ahora el reticulado N_d será el generado por $v_i = \frac{1}{d_i} e_i$. De esta forma, el reticulado usual N_1 será subreticulado de N_d via el morfismo inclusión $\iota \colon N_1 \to N_d$, $\iota(e_i) = d_i v_i$.
Definimos entonces $\mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n)$ como $X(\Delta)$. En este caso los conos pueden ser singulares, entonces no podemos dar una descripción de los $k[S_\sigma]$ tan limpia como antes, pero podemos ver un ejemplo. Sea $(d_0, d_1, d_2) = (1, 2, 3)$.

$\mathbb{P}(1,2,3)$



$\mathbb{P}(1,2,3)$



$\mathbb{P}(1,2,3)$

Localmente tenemos que U_{σ_0} es isomorfo a $\mathbb{A}^2$, pero U_{σ_1} y U_{σ_2} son singulares. Sus puntos singulares son precisamente las subvariedades invariantes x_{σ_1} y x_{σ_2}.

Sabemos de unas charlas atras que estas singularidades vienen dadas localmente por un cuociente por un grupo abeliano, pero el morfismo $\iota\colon N_1 \to N_d$ de hecho nos dice que $\mathbb{P}(1,2,3)$ es el cuociente global de $\mathbb{P}^2$ por $G = \operatorname{Spec}(k[\operatorname{coker}\iota^*]) \cong \mu_2 \times \mu_3$ (si $\operatorname{char}(k) \nmid 6$).

Por ejemplo, U_0, G actúa como $((-1)^a, \omega^b)(x,y) = ((-1)^a x, \omega^b y)$, y el cuociente viene dado por $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2, y^3)$.

Se puede verificar que en U_2, la componente μ_2 de G no afecta a la singularidad, que es de tipo $\frac{1}{3}(1,2)$. Ahora veremos que en U_1, la componente μ_3 no afecta, y la singularidad es de tipo $\frac{1}{2}(1,1)$.

$\mathbb{P}(1,2,3)$

Para estudiar U_1, vemos que

$$\begin{aligned} S_{\sigma_1} &= \left\{ u_0 v_0^* + u_1 v_1^* + u_2 v_2^* \mid u_0 + 2u_1 + 3u_2 = 0 \text{ y } u_0, u_2 \geq 0 \right\} \\ &= \langle 2v_0^* - v_1^*, 2v_2^* - 3v_1^*, v_0^* + v_1^* - 2v_1^* \rangle \end{aligned}$$

Así, si denotamos por $\xi_i = \chi^{v_i^*}$ (para diferenciar con $\mathbb{P}^2$),

$$U_{\sigma_1} = \operatorname{Spec}\left(k\left[\frac{\xi_0^2}{\xi_1}, \frac{\xi_2^2}{\xi_1^3}, \frac{\xi_0\xi_2}{\xi_1^2} \right] \right)$$

y a nivel de álgebras el cuociente se ve como

$$k\left[\frac{\xi_0^2}{\xi_1}, \frac{\xi_2^2}{\xi_1^3}, \frac{\xi_0\xi_2}{\xi_1^2} \right] \to k\left[\frac{\chi_0}{\chi_1}, \frac{\chi_2}{\chi_1} \right], \quad \xi_0 \mapsto \chi_0, \xi_1 \mapsto \chi_1^2, \xi_2 \mapsto \chi_2^3$$

en coordenadas, esto es $(X_1, X_2) \mapsto (X_1^2, X_2^6, X_1 X_2^3)$ y la acción de G en $\mathbb{A}^2$ es $((-1)^a, \omega^b)(X_1, X_2) = ((-1)^a X_1, (-1)^a \omega^b X_2)$.

Espacio Proyectivo Pesado

Más generalmente, dados $d_0, \ldots, d_n$ enteros positivos, tales que $\mathrm{char}(k) \nmid d_i$ siempre podemos obtener un isomorfismo de variedades tóricas

$$\mathbb{P}^n /\!\!/ G \cong \mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n)$$

donde $G = \prod \mu_{d_i}$.

Finalmente notamos que $\mathbb{P}^n$ también es un cuociente de $\mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n)$ por algún grupo finito G. Esto es porque la función $N_d \to N_1$ definida por $v_i \mapsto \frac{\mathrm{lcm}(d_j)}{d_i} e_i$ es una inmersión que se porta bien con los conos.

Cuocientes de $\mathbb{P}^2$

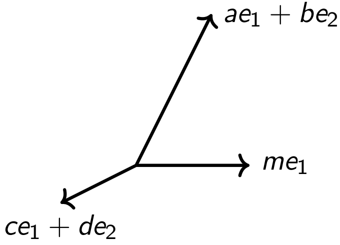
Algo peculiar de los planos proyectivos pesados y de cuocientes de $\mathbb{P}^2$ en general, es que Δ tiene 3 conos maximales, lo cual es el mínimo para abanicos completos.

De hecho resulta ser que todos los abanicos completos de 3 conos son de ese tipo

Proposición

Todo $X(\Delta)$ con Δ abanico completo en $\mathbb{R}^2$ formado por 3 conos es un cuociente de $\mathbb{P}^2$.

Para demostrarlo, basta encontrar un morfismo de cokernel finito del abanico definiendo $\mathbb{P}^2$ cuya imagen sobre $\mathbb{R}$ sea Δ.



Sea Δ un abanico en $\mathbb{Z}^2$ generado por 3 rayos v_1, v_2, v_3.
Bajo un cambio de coordenadas, podemos asumir $v_1 = me_1$, $v_2 = ae_1 + be_2$, $v_3 = ce_1 + de_2$, con $m > 0$, $b > 0$, $d < 0$.
Como σ_1 debe ser punteado, $v_2 \times v_3 = ad - bc > 0$.
Consideramos la función $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ dada por la matriz

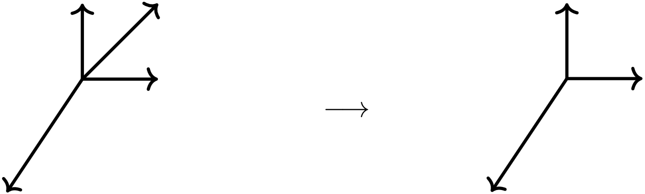
$$M = \begin{pmatrix} m(ad - bc) & -mad \\ 0 & -mbd \end{pmatrix}$$

De este modo $Me_1 = (ad - bc)v_1$, $Me_2 = -mdv_2$ y $M(-e_1 - e_2) = mbv_3$.

Blowup de $\mathbb{P}(1,2,3)$

En el caso en que v_1, v_2, v_3 generen N como retículo, esto de hecho otorga un isomorfismo $\mathbb{P}(ad-bc, -md, mb) \cong X(\Delta)$.

Antes vimos que toda variedad tórica simplicial es el cuociente de una variedad suave por un un grupo abeliano finito. ¿Será que esto es verdad para variedades provenientes de abanicos? La respuesta es que no. Sea $f\colon Y \to \mathbb{P}(1,2,3)$ el blowup en x_{σ_0}. Probaremos que Y no es un cuociente por un grupo finito.



Blowup de $\mathbb{P}(1,2,3)$

Los rayos de Δ están generados por $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_2$, $v_4 = -2e_1 - 3e_2$. Para que Y sea un cuociente por una variedad suave, debe existir un subreticulado $N \subseteq \mathbb{Z}^2$ tal que para cada $\sigma \in \Delta$ maximal, si sus caretas son generadas por v_i y v_j, entonces N es generado por $N \cap \mathbb{Z}v_i + \mathbb{Z}v_j$. Esto es lo mismo a pedir que existan a, b, c, d tales que

- $\{av_1, bv_2\}$ es base ordenada de N
- $\{bv_2, cv_3\}$ es base ordenada de N
- $\{cv_3, dv_4\}$ es base ordenada de N
- $\{dv_4, av_1\}$ es base ordenada de N

Si todos esos pares fueran base de N, entonces el área cubierta por cada uno sería constante, es decir,

$$av_1 \times bv_2 = bv_2 \times cv_3 = cv_3 \times dv_4 = dv_4 \times av_1$$

Blowup de $\mathbb{P}(1,2,3)$

Desarrollando,

$$\begin{array}{ccccccc} av_1 \times bv_2 & = & bv_2 \times cv_3 & = & cv_3 \times dv_4 & = & dv_4 \times av_1 \\ \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & b \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} b & 0 \\ b & c \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} 0 & -2d \\ c & -3d \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} -2d & a \\ -3d & 0 \end{vmatrix} \\ ab & = & bc & = & 2cd & = & 3ad \end{array}$$

De la primera igualdad obtenemos $a = c$, y de la última obtenemos $2d = 3d$, lo que no puede ser ya que estos valores deben ser positivos.

Otras propiedades de $\mathbb{P}^2$

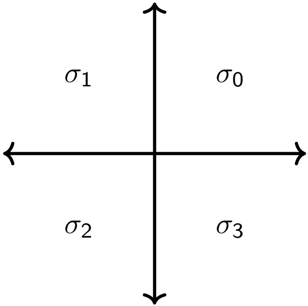
Proposición

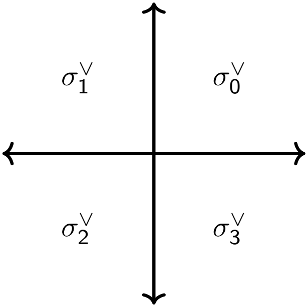
Sea Δ un abanico completo en $\mathbb{R}^2$. Luego $X(\Delta)$ admite un morfismo tórico no trivial a $\mathbb{P}^1$ ssi existe un rayo $\tau \in \Delta$ tal que $-\tau \in \Delta$. En particular $\mathbb{P}^2$ no admite tal morfismo.

Dem: Si $\tau, -\tau$ están en Δ, simplemente consideramos el morfismo de abanicos dado por $f : N \to N/\tau$.

Si $f_* : X(\Delta) \to \mathbb{P}^1$ es un morfismo tórico, viene inducido de un morfismo de abanicos $f : N \to \mathbb{Z}$. Luego $\ker f$ consiste de un rayo τ y su inverso $-\tau$. Si existiera $\sigma \in \Delta$ tal que $f(\sigma) = \mathbb{R}$, por convexidad τ o τ' está contenido en el interior relativo de σ, lo que no puede suceder pues su intersección con σ debe ser una cara. Esto prueba que para todo σ, $f(\sigma) \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ ó $f(\sigma) \subseteq \mathbb{R}^{\leq 0}$ y que tanto τ como $-\tau$ son conos en Δ.

El siguiente ejemplo icónico es $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Viene dado por el siguiente abanico y dual son





Notar que ambas proyecciones $p_1(a,b) = a$, $p_2(a,b) = b$ definen las proyecciones $\pi_1, \pi_2 \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Para verificar que obtuvimos $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, calculamos

- $U_{\sigma_0} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1, \chi_2]) \cong \{(X, Y)\} = \mathbb{A}^2$
- $U_{\sigma_1} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1^{-1}, \chi_2]) \cong \{(X^{-1}, Y)\} = \mathbb{A}^2$
- $U_{\sigma_2} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1^{-1}, \chi_2^{-1}]) \cong \{(X^{-1}, Y^{-1})\} = \mathbb{A}^2$
- $U_{\sigma_3} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1, \chi_2^{-1}]) \cong \{(X, Y^{-1})\} = \mathbb{A}^2$

donde $X = x_0/x_1$, $Y = y_0/y_1$ y así,

- $U_{\sigma_0} \cup U_{\sigma_1} \cong \{([x_0, x_1], Y)\} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$
- $U_{\sigma_2} \cup U_{\sigma_3} \cong \{([x_0, x_1], Y^{-1})\} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$

de modo que $X(\Delta) \cong \{([x_0, x_1], [y_0, y_1])\} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

$\mathbb{P}^2$ vs $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Una propiedad interesante de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es que no admite morfismos tóricos dominantes a $\mathbb{P}^2$ ni a $\mathbb{P}^2 /\!\!/ G$. Esto es porque no es posible remover un rayo del abanico dejando solamente conos punteados.
Esta propiedad es compartida por todos los abanicos Δ construidos a partir de un conjunto de cuatro rayos $\{v_1, -v_1, v_2, -v_2\}$, y al ser isomorfos a $\Delta_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$ (sobre $\mathbb{R}$) no es complicado mostrar que estos corresponden precisamente a los cuocientes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ por un grupo finito.

Proposicón (char$(k) = 0$)

Sea $X(\Delta)$ una superficie tórica propia. Exactamente una de las siguientes se cumple

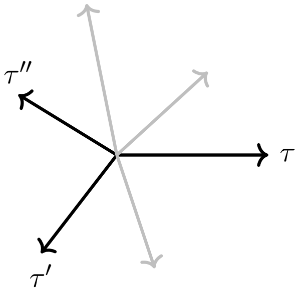
- Existe un morfismo tórico birracional $f \colon X(\Delta) \to \mathbb{P}^2 /\!\!/ G$ para algún G finito
- $X(\Delta) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 /\!\!/ G$ para algún G finito.

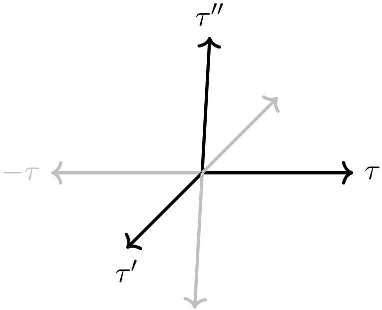
$\mathbb{P}^2$ vs $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Basta comprobar que siempre que Δ no esté generado por cuatro rayos $\{v_1, -v_1, v_2, -v_2\}$ entonces es posible escoger tres rayos de modo que su abanico generado consiste de conos punteados.

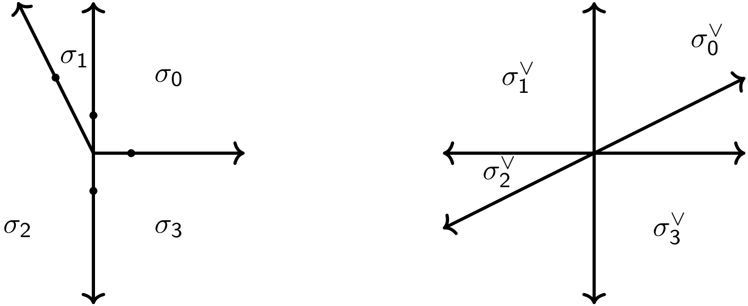
- Caso 1: Existe $\tau \in \Delta$ tal que $-\tau \notin \Delta$. Basta con escoger τ y los dos rayos τ', τ'' más cercanos a $-\tau$.
- Caso 2: Para todo $\tau \in \Delta$, $-\tau \in \Delta$. En este caso podemos asumir que la cantidad de rayos es al menos 6. Consideramos τ cualquiera en Δ, y τ', τ'' los rayos más cercanos a $-\tau$. Como hay al menos 4 rayos distintos a $\tau, -\tau$ y para cada uno su opuesto también está en Δ, entonces τ' y τ'' son linealmente independientes y generan conos punteados.

$\mathbb{P}^2$ vs $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$





Consideramos el abanico generado por los rayos e_1, e_2, $-e_2$, $-e_1 + ae_2$.



Denotamos $\mathbb{F}_a = X(\Delta)$

Algunas propiedades inmediatas de esta este abanico es que para todo a, $\mathbb{F}_a$ es suave y existe un morfismo $\mathbb{F}_a \to \mathbb{P}^1$ dado por la proyección en la primera coordenada del abanico.
Es claro que $\mathbb{F}_{-a} \cong \mathbb{F}_a$ y también es inmediato que $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y que $\mathbb{F}_1$ es el blowup de $\mathbb{P}^2$ en un punto.

Los conos duales son generados por

$$S_{\sigma_0} = \langle e_1^*, e_2^* \rangle$$

$$S_{\sigma_1} = \langle -e_1^*, ae_1 + e_2^* \rangle$$

$$S_{\sigma_2} = \langle -e_1^*, -ae_1 - e_2^* \rangle$$

$$S_{\sigma_3} = \langle e_1^*, -e_2^* \rangle$$

Entonces si $X = x_0/x_1$, $Y = y_0/y_1$

- $U_{\sigma_0} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1, \chi_2]) \cong \{(X, Y)\} = \mathbb{A}^2$
- $U_{\sigma_1} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1^{-1}, \chi_1^a \chi_2]) \cong \{(X^{-1}, X^a Y)\} = \mathbb{A}^2$
- $U_{\sigma_2} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1^{-1}, \chi_1^{-a} \chi_2^{-1}]) \cong \{(X^{-1}, X^{-a} Y^{-1})\} = \mathbb{A}^2$
- $U_{\sigma_3} = \mathrm{Spec}(k[\chi_1, \chi_2^{-1}]) \cong \{(X, Y^{-1})\} = \mathbb{A}^2$

y así, definiendo $z_0/z_1 = X^a Y$

- $U_{\sigma_0} \cup U_{\sigma_3} \cong \{(X, [y_0, y_1])\} = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$
- $U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2} \cong \{(X^{-1}, [z_0, z_1])\} = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$

Esto nos dice que $\mathbb{F}_a$ es un fibrado sobre $\mathbb{P}^1 = \{[x_0, x_1]\}$ con fibra $\mathbb{P}^1$. La manera en que se pegan estos dos abiertos es identificando $z_0/z_1 = (x_0/x_1)^a y_0/y_1$, es decir la trancisión es

$$(X, [y_0, y_1]) \mapsto (X^{-1}, [X^a y_0, y_1])$$

Esta definición coincide con

$$\mathbb{F}_a = \left\{[x_0, x_1], [\mu_0, \mu_1, \mu_2] \mid x_0^a \mu_0 = x_1^a \mu_1\right\} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$$