RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES TÓRICAS (SUPERFICIES)

RECORDAR: DADA UNA SUPERFICIE X, UNA RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES DE X ES UN MORFISMO BIRRACIONAL PROPIO

$$f : Y \longrightarrow X$$

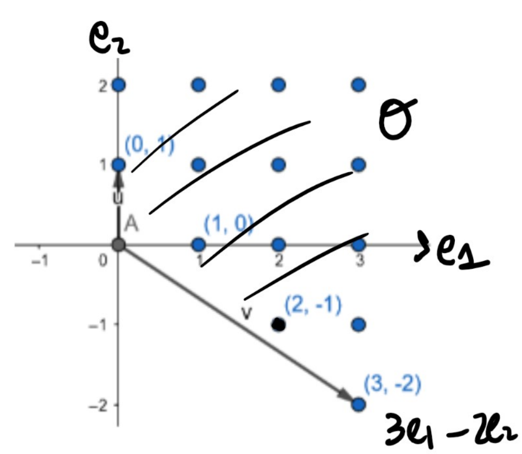
$$i : N \longrightarrow N \quad , \quad i : \Delta' \longrightarrow \Delta$$
$$\sigma_1' \longmapsto i(\sigma_1') = \sigma_1' \subseteq \sigma_1$$

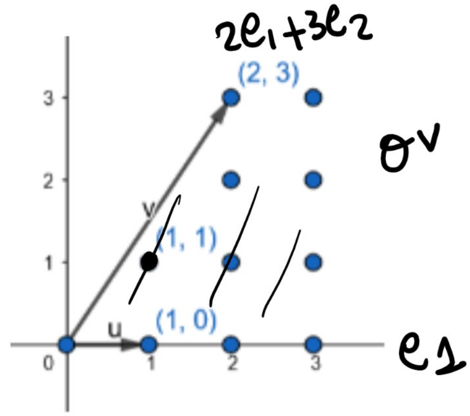
$$f : X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$$

PROP: LA APLICACIÓN $f : X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$ ES PROPIA SII $f^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|$.

EJEMPLO: CONSIDEREMOS EL RETICULO $N = \mathbb{Z}^2$ y EL CONO σ GENERADO POR $3e_1 - 2e_2$ y e_2

$$\sigma = \langle e_2 , 3e_1 - 2e_2 \rangle$$





$$\sigma^\vee = \langle e_1, 2e_1+3e_2, e_1+e_2 \rangle \quad , \quad \chi^{e_1} = x, \quad \chi^{e_2} = y$$

$$\mathbb{C}[\underset{\underset{u}{\shortparallel}}{x}, \underset{\underset{v}{\shortparallel}}{x^2y^3}, \underset{\underset{w}{\shortparallel}}{xy}] = K[S_\sigma]$$

$$\mathbb{C}[u,v,w] \big/ \langle uw - v^3 \rangle$$

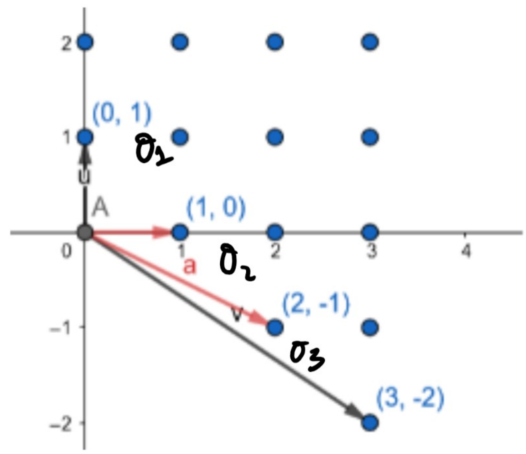
EL PUNTO $(0,0,0)$ ES UN PUNTO SINGULAR

$\frac{1}{3}(1,2)$ SING. COCIENTE.

$\Delta = \sigma$

$X(\Delta) = V(uw - v^3)$

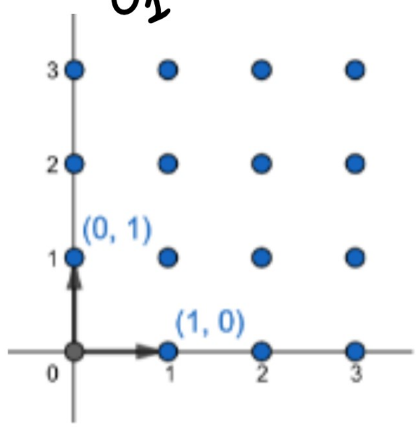
En (u, v, w)



$\Delta' = \sigma_1 \cup \sigma_2 \sigma_3$

$\sigma_1 = \langle e_2, e_1 \rangle$, $\sigma_2 = \langle e_2, 2e_1 - e_2 \rangle$, $\sigma_3 = \langle 2e_1 - e_2, 3e_1 - 2e_2 \rangle$

$\sigma_1^\vee$

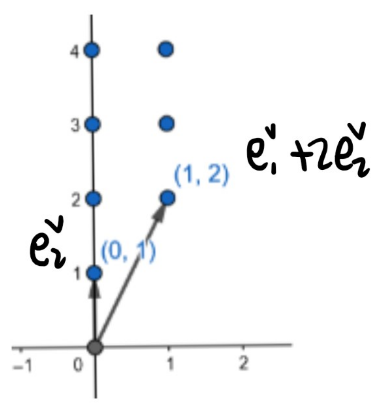


$\sigma_1^\vee = \langle e_1^\vee, e_2^\vee \rangle$

$\mathbb{C}[x, y]$

$X(\sigma_1^\vee) = \mathbb{C}^2_{(x,y)}$
$\downarrow$
SUAVE.

$\sigma_2^\vee = \langle e_2^\vee, e_1^\vee + 2e_2^\vee \rangle \longrightarrow \mathbb{C}[y, xy^2]$, $X(\sigma_2^\vee) = \mathbb{C}^2_{(y, xy^2)}$
$\downarrow$
SUAVE



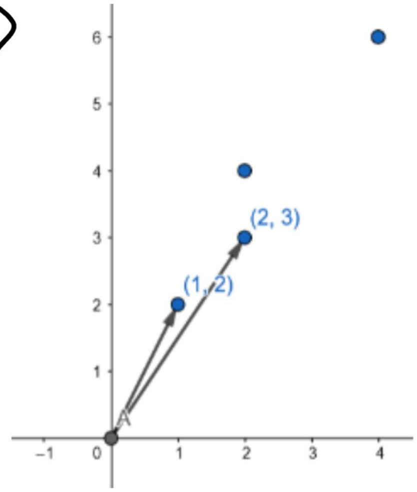
$\sigma_3^\vee = \langle 2e_1^\vee + 3e_2^\vee, e_1^\vee + 2e_2^\vee \rangle$

$\rightsquigarrow \mathbb{C}[x^2y^3, xy^2]$

$X(\sigma_3^\vee) = \mathbb{C}^2_{(x^2y^3, xy^2)}$

$\downarrow$

SUAVE



$$X(\Delta') = X(\sigma_1^\vee) \cup X(\sigma_2^\vee) \cup X(\sigma_3^\vee).$$

$$f : X(\Delta') \longrightarrow X(\Delta)$$ RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES.

FRACCIÓN CONTINUA DE HIRZEBRUCH

SEAN m, k t.q $(m,k) = 1$ y $0 \leq k < m$

$$\frac{m}{k} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{a_r}}} \quad , \quad a_i \geq 2$$

$$[a_1, \dots, a_r] =: \frac{m}{k}.$$

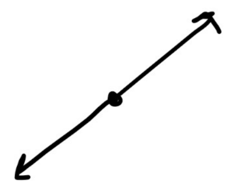
$\sigma = \langle e_2 , m e_1 - k e_2 \rangle$

$= \langle e_2 , 3e_1 - 2e_2 \rangle$

$\frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} \rightsquigarrow [2,2] = [a_1 , a_2]$

- $\tau_1 = \langle e_1 \rangle \rightsquigarrow$ 

$\cong \mathbb{P}^1$

- $\tau_2 = \langle 2e_1 - e_2 \rangle \rightsquigarrow$  $\cong \mathbb{P}^1$

EN Δ

$\tau_1 = \sigma_1 \cap \sigma_2 \rightsquigarrow D_{\tau_1}$

EN $X_{\sigma_1} \cap D_{\tau_1}$ ES Z^{v} DONDE V ES EL

UN GENERADOR DE S_{σ_1} QUE NO SE ANULA EN τ_1

$X_{\sigma_1} \cap D_{\tau_1} = \{x = 0\}$

$X_{\sigma_2} \cap D_{\tau_2} = \{xy^2 = 0\}$

$$I|_{X_{\sigma_1}} = (x) \qquad I|_{X_{\sigma_2}} = (xy^2)$$

EL DIVISOR EN $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2}$ $\quad \frac{xy^2}{x} = y^2$

$$\mathcal{O}(-D_{\tau_1}) = \mathcal{O}(-2)$$

$$\Rightarrow \quad D_{\tau_1}^2 = -2 \quad , \quad D_{\tau_2}^2 = -2$$

GENERALIZACIÓN DE LA SITUACIÓN

OBS: SI σ ES UN CONO QUE NO ES GENERADO POR UNA BASE DEL RETÍCULO $N (\cong \mathbb{Z}^2)$, ENTONCES PODEMOS ELEGIR e_1, e_2 GENERADORES DE N t.q.

$$\sigma = \langle e_2 , me_1 - ke_2 \rangle \qquad \text{CON} \quad \begin{array}{c} 0 \leq k < m \\ \text{mcd}(k,m) = 1 \end{array}$$

DECIMOS QUE σ TIENE TIPO (m,k)

SI σ TIENE TIPO $(1,0)$ $\Rightarrow$ σ ES NO SINGULAR

PRUEBA: CUALQUIER GENERADOR MINIMAL DE σ ES UNA PARTE DE UNA BASE DE $\mathbb{Z}^2$.

SUP. $\sigma = \langle e_2, me_1 + x e_2 \rangle$ PARA $m>0$

APLICAR EL AUTOMORFISMO $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ $(c \in \mathbb{Z})$ AL RETICULO

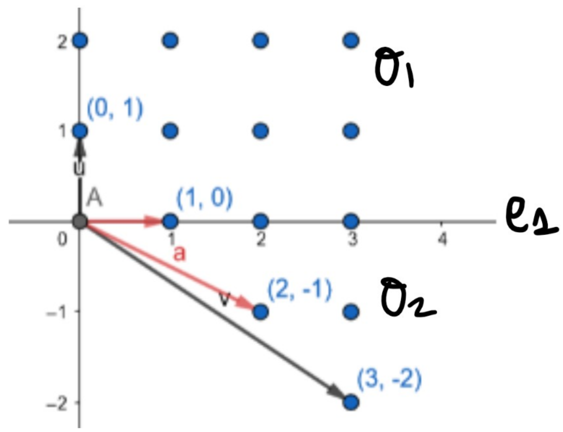
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ cm+x & \underset{\substack{\downarrow \\ e_2}}{1} \end{pmatrix}$$

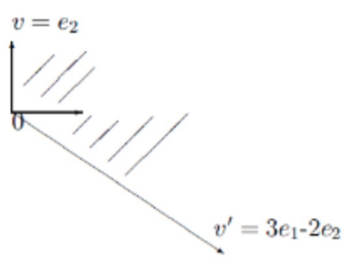
ESCOGEMOS $x = -k$ CON $0 \leq k < m$

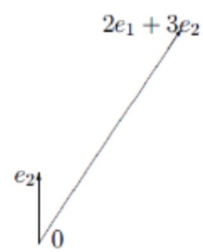
$\mathrm{mcd}(m,k) = 1$ ES DADO POR LA MINIMALIDAD DEL RAYO EN σ.

PASO 1 : INSERTAR LA LINEA GENERADA POR e_1

$\frac{1}{3}(1,2)$







O_2 ES DE TIPO $(2,3) \sim (2,1) = (m_1, k_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ mx & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ ck+m & 1 \end{pmatrix}$$

$m_1 = k \quad , \quad k_1 = -ck - m$

$$m = -ck - k_1 \Rightarrow \frac{m}{k} = -c - \frac{k_1}{k}$$

$$= -c - \frac{1}{\left(\frac{k}{k_1}\right)}$$

σ_2 ES DE TIPO

(m_1, k_1) , $\quad m_1 = k < m$

$0 \leq k_1 < m_1 < m$

UNA SINGULARIDAD DEL TIPO $\frac{1}{m}(1,k)$

$$\sigma = \langle e_2, me_1 - ke_2 \rangle$$

$\frac{m}{k} = [a_1, \dots, a_r]$ $\quad E_1, \dots, E_r$, $\quad E_i^2 = -a_i$

$\frac{m}{m-k} = [b_1, \dots, b_r]$, EL ALGEBRA $R_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$

TIENE UN NUMERO MINIMAL DE GENERADORES

$$\{ u^{s_i} v^{t_i} , 1 \leq i \leq r \}$$

$s_1 = m$, $s_2 = m-k$, $s_{i+1} = b_i s_i - s_{i-1}$

$t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_{i+1} = b_i t_i - t_{i-1}$

PARA $2 \leq i \leq r-1$.