Resolución de singularidades tóricas en dimensión mayor.

Yerko Torres Nova

PUC, Chile

26 de noviembre de 2020

Sección 1

Sea $\sigma = \langle v_1, ..., v_r \rangle$ un **cono simplicial** en $\mathbb{R}^n$ con $v_1, ..., v_r \in \mathbb{Z}^n$ linealmente independientes. Además asumamos que $v_1, ..., v_r$ son **primitivos**, es decir, cada rayo de σ es generado minimalmente por cada v_i. Definimos la **multiplicidad** de σ por

$$\mathrm{mult}(\sigma) := \left| N_\sigma / \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z} v_i \right|,$$

donde $N_\sigma = \mathbb{Z}^n \cap (\sigma + (-\sigma))$.

Sea $\sigma = \langle v_1, ..., v_r \rangle$ un **cono simplicial** en $\mathbb{R}^n$ con $v_1, ..., v_r \in \mathbb{Z}^n$ linealmente independientes. Además asumamos que $v_1, ..., v_r$ son **primitivos**, es decir, cada rayo de σ es generado minimalmente por cada v_i. Definimos la **multiplicidad** de σ por

$$\mathrm{mult}(\sigma) := \left| N_\sigma / \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z} v_i \right|,$$

donde $N_\sigma = \mathbb{Z}^n \cap (\sigma + (-\sigma))$.

Proposición 1

σ es no singular si y sólo si mult$(\sigma) = 1$.

Proof: $\mathrm{mult}(\sigma) = 1 \Leftrightarrow N_\sigma = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z} v_i = \mathbb{Z}^r \Leftrightarrow \sigma \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{N}^r \Leftrightarrow \sigma$ es no singular. □

Proposición 2 (Propiedades de mult)

1. *Sea* $P_\sigma = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i : \lambda_i \in [0,1)\}$, *entonces*

$$mult(\sigma) = |\mathbb{Z}^n \cap P_\sigma|.$$

2. *Si* $e_1, ..., e_r$ *es una base de* N_σ, *y* $v_i = \sum a_{ij} e_j$, *entonces*

$$mult(\sigma) = |\det(a_{ij})|.$$

3. *Si* τ *es una cara de* σ, *entonces* $mult(\tau) \leq mult(\sigma)$.

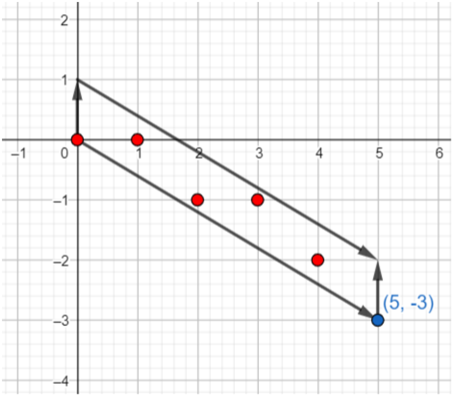
Proof: (1)

Sea $w \in N_\sigma$ un representante de clase del cociente $N_\sigma / \sum_{i=1}^r \mathbb{Z} v_i$. Escribimos $w = \tau_1 v_1 + ... + \tau_r v_r \in \mathbb{Z}^n$ con $\tau_i \in \mathbb{R}$ para todo i. Podemos descomponer $\tau_i = \lambda_i + \lambda'_i$ con $\lambda_i \in [0,1)$ y $\lambda'_i \in \mathbb{Z}$ para cada i. En el cociente se tiene

$$[w] = \left[\sum \lambda_i v_i + \sum \lambda'_i v_i\right] = \left[\sum \lambda_i v_i\right].$$

Notar que $\sum \lambda_i v_i = w - \sum \lambda'_i v_i \in \mathbb{Z}^n$. Luego toda clase de $N_\sigma / \sum_{i=1}^r \mathbb{Z} v_i$ queda representada por un elemento de $\mathbb{Z}^n \cap P_\sigma$. Supongamos ahora que $w_1 = \sum \lambda_i v_i$ y $w_2 = \sum \tau_i v_i$ están en $\mathbb{Z}^n \cap P_\sigma$. Si $[w_1] = [w_2]$, entonces $w_1 - w_2 \in \sum \mathbb{Z} v_i$, es decir, $\lambda_i - \tau_i \in \mathbb{Z}$. Como $|\lambda_i - \tau_i| < 1$, se debe tener $\lambda_i = \tau_i$. Concluyendo que en $\mathbb{Z}^n \cap P_\sigma$ está en biyección con los representates del cociente.

Ejemplo 1.



En $\mathbb{R}^2$ si σ es de tipo (m, l), entonces

$$\mathrm{mult}(\sigma) = |\det(e_2, me_1 - le_2)| = m.$$

Ejemplo 2.

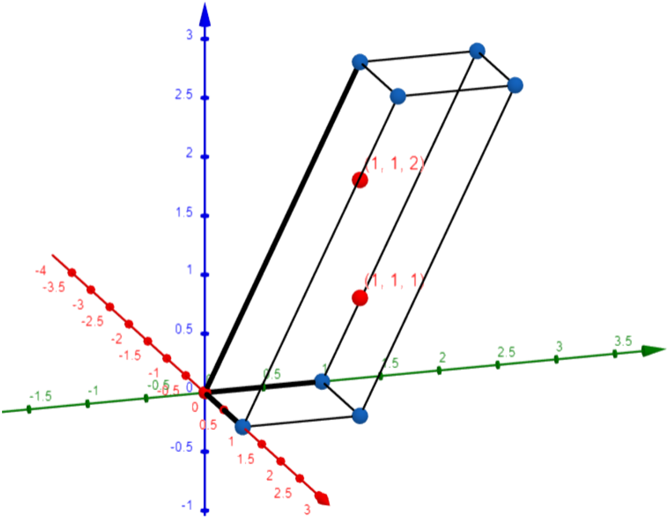
Sea $m \geq 1$ entero. En $\mathbb{R}^3$ consideremos $\sigma = \langle e_1, e_2, e_1 + e_2 + me_3 \rangle$ y su dual $\sigma^\vee = \langle me_1 - e_3, me_2 - e_3, e_3 \rangle$, entonces

$$\operatorname{mult}(\sigma) = m, \quad \operatorname{mult}(\sigma^\vee) = m^2.$$

En particular los puntos de $(P_\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \setminus 0$, quedan determinados por

$$(1, 1, k) = \frac{m-k}{m} e_1 + \frac{m-k}{m} e_2 + \frac{k}{m}(e_1 + e_2 + me_3), \quad 0 < k < m.$$

P_σ para $m = 3$.



Sección 2

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$ y $v \in |\Delta|$ no cero. Sea $\gamma \in \Delta$ un cono conteniendo a v y σ cono en γ tal que $v \notin \sigma$. Definimos $\sigma(v)$ a ser el cono generado por σ y v.

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$ y $v \in |\Delta|$ no cero. Sea $\gamma \in \Delta$ un cono conteniendo a v y σ cono en γ tal que $v \notin \sigma$. Definimos $\sigma(v)$ a ser el cono generado por σ y v.

Lema 1

$\dim \sigma(v) = \dim \sigma + 1$

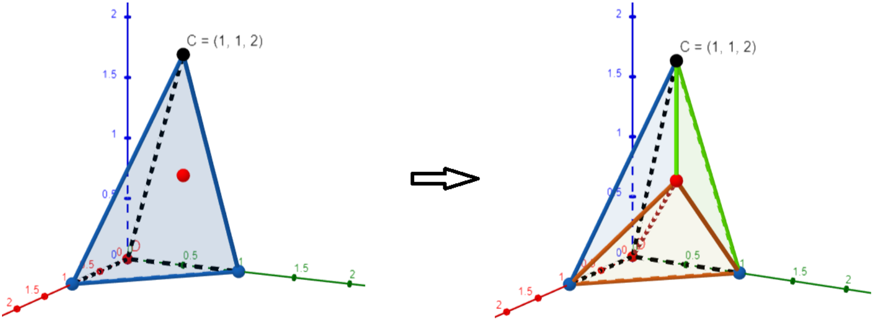
Proof: Si $\gamma \in \Delta$ es el cono conteniendo a σ y v, entonces $\sigma = \gamma \cap (\sigma + (-\sigma))$. Como $v \notin \sigma$, entonces $v \notin (\sigma + (-\sigma))$. Luego v es linealmente independiente a los generadores de σ y por esto $\dim \sigma(v) = \dim \sigma + 1$. □

Definimos la **subdivisión estelar** de Δ a ser el fan $\Delta(v)$ conformado por lo siguientes conos

1. Conos σ de Δ con $v \notin \sigma$.
2. Conos de la forma $\sigma(v)$ definidos anteriormente.

Se puede probar que $\Delta(v)$ es un refinamiento del fan Δ.

Ejemplo. Subdivisión estelar del cono $\langle e_1, e_2, e_1 + e_2 + 2e_3 \rangle$.



Proposición 3

Dado un fan Δ en $\mathbb{Z}^n$, existe una sucesión de subdivisiones estelares tal que en cada paso NO se modifican los conos simpliciales de Δ y tal que el fan de llegada es simplicial.

Proposición 3

Dado un fan Δ en $\mathbb{Z}^n$, existe una sucesión de subdivisiones estelares tal que en cada paso NO se modifican los conos simpliciales de Δ y tal que el fan de llegada es simplicial.

Proof:

- Sea k el menor entero tal que los todos conos de dimensión $\leq k-1$ en Δ son simpliciales.

Proposición 3

Dado un fan Δ en $\mathbb{Z}^n$, existe una sucesión de subdivisiones estelares tal que en cada paso NO se modifican los conos simpliciales de Δ y tal que el fan de llegada es simplicial.

Proof:

- Sea k el menor entero tal que los todos conos de dimensión $\leq k-1$ en Δ son simpliciales.
- Sea $\sigma \in \Delta$ cono NO simplicial con $\dim \sigma = k$ y $v \in \mathrm{RInt}(\sigma)$. Consideremos $\Delta(v)$.

Proposición 3

Dado un fan Δ en $\mathbb{Z}^n$, existe una sucesión de subdivisiones estelares tal que en cada paso NO se modifican los conos simpliciales de Δ y tal que el fan de llegada es simplicial.

Proof:

- Sea k el menor entero tal que los todos conos de dimensión $\leq k-1$ en Δ son simpliciales.
- Sea $\sigma \in \Delta$ cono NO simplicial con $\dim \sigma = k$ y $v \in \mathrm{RInt}(\sigma)$. Consideremos $\Delta(v)$.
- Si $\tau \in \Delta$ es simplicial, entonces no puede contener a σ y en particular no contiene a v. Luego τ está en $\Delta(v)$. De este modo $\Delta(v)$ preserva los conos simpliciales de Δ.

- Sea $\tau(v) \in \Delta(v)$ con $\dim \tau(v) \leq k$, entonces por [Lemma 1] se tiene $\dim \tau \leq k-1$, es decir, τ simplicial. Así $\tau(v)$ es simplicial. Luego todos los conos de $\Delta(v)$ con dimensión $\leq k-1$ son simpliciales, y todos los conos NO simpliciales de $\Delta(v)$ con dimensión $= k$ son conos de Δ, es decir, conos que no son de la forma $\sigma'(v)$.

- Sea $\tau(v) \in \Delta(v)$ con $\dim \tau(v) \leq k$, entonces por [Lemma 1] se tiene $\dim \tau \leq k-1$, es decir, τ simplicial. Así $\tau(v)$ es simplicial. Luego todos los conos de $\Delta(v)$ con dimensión $\leq k-1$ son simpliciales, y todos los conos NO simpliciales de $\Delta(v)$ con dimensión $= k$ son conos de Δ, es decir, conos que no son de la forma $\sigma'(v)$.
- Como $v \in \mathrm{RInt}(\sigma)$, entonces en $\Delta(v)$ el cono σ fue subdividido y así $\sigma \notin \Delta(v)$. De donde concluimos

$$\#\left\{ \begin{array}{c} \text{Conos de } \Delta(v) \text{ no} \\ \text{simpliciales de dim} = k \end{array} \right\} < \#\left\{ \begin{array}{c} \text{Conos de } \Delta \text{ no} \\ \text{simpliciales de dim} = k \end{array} \right\}.$$

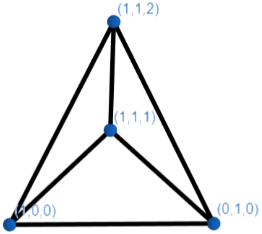
- Sea $\tau(v) \in \Delta(v)$ con $\dim \tau(v) \leq k$, entonces por [Lemma 1] se tiene $\dim \tau \leq k-1$, es decir, τ simplicial. Así $\tau(v)$ es simplicial. Luego todos los conos de $\Delta(v)$ con dimensión $\leq k-1$ son simpliciales, y todos los conos NO simpliciales de $\Delta(v)$ con dimensión $= k$ son conos de Δ, es decir, conos que no son de la forma $\sigma'(v)$.
- Como $v \in \mathrm{RInt}(\sigma)$, entonces en $\Delta(v)$ el cono σ fue subdividido y así $\sigma \notin \Delta(v)$. De donde concluimos

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{Conos de } \Delta(v) \text{ no}\\ \text{simpliciales de dim} = k\end{array}\right\} < \#\left\{\begin{array}{c}\text{Conos de } \Delta \text{ no}\\ \text{simpliciales de dim} = k\end{array}\right\}.$$

- Seguimos el proceso anterior hasta que el nuevo fan Δ tenga todos sus conos de dimensión k simpliciales. Luego aplicar el proceso para los conos de dimensión superior $j > k$ hasta terminar.

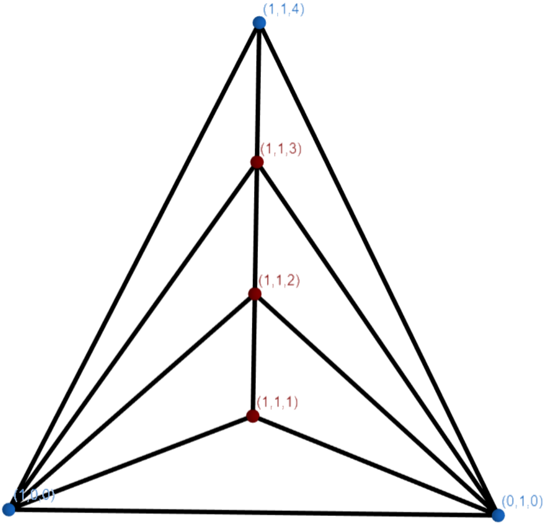
Sección 3

Ejemplo. Para el cono $\sigma = \langle e_1, e_2, e_1 + e_2 + 2e_3 \rangle$, se tiene $U_\sigma = \{w^2 = yz\} \subset \mathbb{A}^4_{x,y,z,w}$. La subdivisión queda:



El fan resultante queda dado por los conos mostrados en la figura, todos con multiplicidad 1. Por lo tanto define una resolución de U_σ

Ejemplo. Resolución del cono $\sigma = \langle e_1, e_2, e_1 + e_2 + 4e_3 \rangle$,



Proposición 4

Sea Δ un fan simplicial en $\mathbb{Z}^n$. Supongamos que existe un cono en Δ con generadores primitivos $v_1, ..., v_r$, y que $v = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ con cada $t_i \in (0, 1)$. Sea $m = \text{máx}\{mult(\sigma') : \sigma' \in \Delta, v \in \sigma'\}$. Entonces todo cono de $\Delta(v)$ que no está en Δ, tiene multiplicidad estrictamente menor a m.

Proof

Proposición 4

Sea Δ un fan simplicial en $\mathbb{Z}^n$. Supongamos que existe un cono en Δ con generadores primitivos $v_1, ..., v_r$, y que $v = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ con cada $t_i \in (0,1)$. Sea $m = \max\{mult(\sigma') : \sigma' \in \Delta, v \in \sigma'\}$. Entonces todo cono de $\Delta(v)$ que no está en Δ, tiene multiplicidad estrictamente menor a m.

Proof

1. Un cono en $\Delta(v) - \Delta$ debe ser de la forma $\sigma(v)$ tal que $v \notin \sigma$ y $\sigma \leq \gamma$ con $v \in \gamma$.

Proposición 4

Sea Δ un fan simplicial en $\mathbb{Z}^n$. Supongamos que existe un cono en Δ con generadores primitivos $v_1, ..., v_r$, y que $v = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ con cada $t_i \in (0, 1)$. Sea $m = \text{máx}\{mult(\sigma') : \sigma' \in \Delta, v \in \sigma'\}$. Entonces todo cono de $\Delta(v)$ que no está en Δ, tiene multiplicidad estrictamente menor a m.

Proof

1. Un cono en $\Delta(v) - \Delta$ debe ser de la forma $\sigma(v)$ tal que $v \notin \sigma$ y $\sigma \leq \gamma$ con $v \in \gamma$.
2. Podemos asumir $\gamma = \langle v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s \rangle$. Como $v \notin \sigma$, entonces existe $v_i \notin \sigma$. Tomar $\tau = \langle v_j, w_l, \hat{v}_i \rangle$ con $\sigma < \tau < \gamma$ y $v \notin \tau$. Luego $\sigma(v) < \tau(v)$.

Proposición 4

Sea Δ un fan simplicial en $\mathbb{Z}^n$. Supongamos que existe un cono en Δ con generadores primitivos $v_1, ..., v_r$, y que $v = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ con cada $t_i \in (0,1)$. Sea $m = \text{máx}\{mult(\sigma') : \sigma' \in \Delta, v \in \sigma'\}$. Entonces todo cono de $\Delta(v)$ que no está en Δ, tiene multiplicidad estrictamente menor a m.

Proof

1. Un cono en $\Delta(v) - \Delta$ debe ser de la forma $\sigma(v)$ tal que $v \notin \sigma$ y $\sigma \leq \gamma$ con $v \in \gamma$.
2. Podemos asumir $\gamma = \langle v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s \rangle$. Como $v \notin \sigma$, entonces existe $v_i \notin \sigma$. Tomar $\tau = \langle v_j, w_l, \hat{v}_i \rangle$ con $\sigma < \tau < \gamma$ y $v \notin \tau$. Luego $\sigma(v) < \tau(v)$.
3. Así $\text{mult}(\sigma(v)) \leq \text{mult}(\tau(v)) = t_i \text{mult}(\gamma) \leq m t_i < m$.

Theorem 1

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$. Existe una sucesión de subdivisiones estelares llegando a un fan no singular Σ tal que todo cono no singular de Δ está en Σ.

Theorem 1

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$. Existe una sucesión de subdivisiones estelares llegando a un fan no singular Σ tal que todo cono no singular de Δ está en Σ.

Proof

1. Luego de [Prop 3], podemos asumir Δ simplicial.

Theorem 1

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$. Existe una sucesión de subdivisiones estelares llegando a un fan no singular Σ tal que todo cono no singular de Δ está en Σ.

Proof

1. Luego de [Prop 3], podemos asumir Δ simplicial.
2. Sea $m = \text{máx}\{\text{mult}(\sigma') : \sigma' \in \Delta\}$, y $\sigma \in \Delta$ tal que $\text{mult}(\sigma) = m$. Si $m = 1$, nada que hacer.

Theorem 1

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$. Existe una sucesión de subdivisiones estelares llegando a un fan no singular Σ tal que todo cono no singular de Δ está en Σ.

Proof

1. Luego de [Prop 3], podemos asumir Δ simplicial.
2. Sea $m = \text{máx}\{\text{mult}(\sigma') : \sigma' \in \Delta\}$, y $\sigma \in \Delta$ tal que $\text{mult}(\sigma) = m$. Si $m = 1$, nada que hacer.
3. Si $m > 1$ y $\sigma = \langle v_1, ..., v_r \rangle$ con v_i primitivos, entonces existe $v = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ con $t_i \in [0, 1)$.

Theorem 1

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$. Existe una sucesión de subdivisiones estelares llegando a un fan no singular Σ tal que todo cono no singular de Δ está en Σ.

Proof

1. Luego de [Prop 3], podemos asumir Δ simplicial.
2. Sea $m = \text{máx}\{\text{mult}(\sigma') : \sigma' \in \Delta\}$, y $\sigma \in \Delta$ tal que $\text{mult}(\sigma) = m$. Si $m = 1$, nada que hacer.
3. Si $m > 1$ y $\sigma = \langle v_1, ..., v_r \rangle$ con v_i primitivos, entonces existe $v = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ con $t_i \in [0, 1)$.
4. $\{v_i : t_i > 0\}$ son generadores primitivos de un cono conteniendo a v. [Prop 4] implica que todo cono de $\Delta(v) - \Delta$ tiene multiplicidad $< m$, y $\Delta(v)$ no contiene a σ.

Theorem 1

Sea Δ un fan en $\mathbb{Z}^n$. Existe una sucesión de subdivisiones estelares llegando a un fan no singular Σ tal que todo cono no singular de Δ está en Σ.

Proof

1. Luego de [Prop 3], podemos asumir Δ simplicial.
2. Sea $m = \text{máx}\{\text{mult}(\sigma') : \sigma' \in \Delta\}$, y $\sigma \in \Delta$ tal que $\text{mult}(\sigma) = m$. Si $m = 1$, nada que hacer.
3. Si $m > 1$ y $\sigma = \langle v_1, ..., v_r \rangle$ con v_i primitivos, entonces existe $v = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i \in \mathbb{Z}^n$ con $t_i \in [0, 1)$.
4. $\{v_i : t_i > 0\}$ son generadores primitivos de un cono conteniendo a v. [Prop 4] implica que todo cono de $\Delta(v) - \Delta$ tiene multiplicidad $< m$, y $\Delta(v)$ no contiene a σ.
5. Si $\tau \in \Delta$ es no singular, entonces $v \notin \tau$. Luego $\tau \in \Delta(v)$.

Corollary 2

Sea $X(\Delta)$ variedad tórica. Entonces existe un morfismo propio birracional $X(\Sigma) \to X(\Delta)$, tal que $X(\Sigma)$ es suave y f es un isomorfismo sobre el locus no singular de $X(\Delta)$.

GRACIAS!