DIVISORES TÓRICOS

DEF: UN DIVISOR DE WEIL ES UN ELEMENTO $(W(X))$

$$D = \sum n_i A_i - \sum m_j B_j \quad , \quad n_i, m_j > 0$$

$A_i, B_j \subseteq X$ SUBVARIEDADES DE CODIMENSIÓN 1.

<u>EJEMPLO:</u> EN $\mathbb{C}^2_{(z_1,z_2)}$, $A = \{z_1 = 0\}$, $B = \{z_2 = 0\}$

$$D = 2A - B$$

$\boxed{\text{DEF:}}$ UN DIVISOR DE CARTIER $D = \{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ DONDE $X = \cup U_\alpha$, $(C(X))$

U_α ABIERTOS, $f_\alpha \in R(U_\alpha)$ (FUNCIONES RACIONALES EN U_α)

t.q. SI $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset \Rightarrow \dfrac{f_\alpha}{f_\beta} \in \underbrace{O^*(U_\alpha \cap U_\beta)}_{\text{FUNCIONES REGULARES } \neq 0}$

<u>EJEMPLO:</u> SEA $X = \mathbb{C}^2$ y $U = \mathbb{C}^2$, f EN U DADA POR

$$f(z_1, z_2) = \frac{z_1^2}{z_2}$$

$$D = \left\{\left(U, \frac{z_1^2}{z_2}\right)\right\}$$

PROP: SI X ES UNA VARIEDAD NORMAL ENTONCES

$$C(X) \hookrightarrow W(X)$$

$$D = \{(U, f)\} \longmapsto \sum_{\substack{V \subseteq X \\ \text{SUBVARIEDADES} \\ \text{codim}(V)=1}} \text{ord}_V(D) \cdot V$$

EJEMPLO: $D = \left(U, \frac{z_1^2}{z_2}\right)$ EN $\mathbb{C}^2_{(z_1, z_2)}$

SEA $A = \{z_1 = 0\}$, $B = \{z_2 = 0\}$

$$D \longmapsto 2A - B \text{ (COMO DIVISOR DE WEIL)}$$

DEF: $P(X)$ ES EL CONJUNTO DE DIVISORES PRINCIPALES, i.e SON DE LA FORMA

$$\sum_{V \subseteq X} \text{ord}_V(f) \cdot V$$

PARA f FUNCIÓN RACIONAL.

GRUPO DE PICARD — GRUPO DE CLASES

$$C(X)/P(X) := \text{Pic}(X) \hookrightarrow Cl(X) = W(X)/P(X)$$

ASOCIADO A D UN DIVISOR DE CARTIER, $D = \{(U_\alpha, f_\alpha)\}$

TENEMOS EL SHEAF $\mathcal{O}(D)$

$$\mathcal{O}(D)(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}(D)) = \{f \in K(X)\setminus\{0\} \mid \operatorname{div}(f) + D \geq 0 \text{ EN } U\} \cup \{0\}.$$

DIVISORES TÓRICOS

SEA $X = X(\Delta)$ LA VARIEDAD CORRESPONDIENTE A Δ, N EL RETICULO Y T EL TORO.

SEAN $\tau_1, \dots, \tau_d$ LOS RAYOS DE Δ. PARA CADA i, SEA $v_i \in N$ EL PRIMER ELEMENTO EN N DE τ_i.

ASOCIADO A τ_i TENEMOS $V(\tau_i) = \{\chi^{v_i} = 0\} =: D_i$

D_i SON INVARIANTES BAJO LA ACCIÓN DE T.

DENOTAMOS POR $\operatorname{Div}_T(X)$ AL GRUPO DE T-DIVISORES DE WEIL (LOS DIVISORES INVARIANTES BAJO T)

$$\begin{array}{c} \operatorname{Cart}_T(X) \text{ AL GRUPO DE } T\text{-DIVISORES DE CARTIER} \\ \| \\ \operatorname{Cart}(X) \cap \operatorname{Div}_T(X) \end{array}$$

HECHO: $\mathrm{Div}_T(X) = \langle D_1, \dots, D_d \rangle_{\mathbb{Z}}$, $\sum a_i D_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$

LEMA: SI $u \in M (= N^\vee)$ ENTONCES

$$\mathrm{div}(\chi^u) = \sum_{i=1}^{d} \langle u, v_i \rangle D_i \qquad , D_i = V(\tau_i)$$

$$\tau_i = \langle v_i \rangle$$

DEM: PODEMOS REEMPLAZAR X POR $U_{\tau_1} \cup \dots \cup U_{\tau_d}$

$$U_{\tau_i} = \mathrm{Spec}\, k[\tau_i^\vee \cap M]$$

ASÍ, ES SUFICIENTE PROBARLO EN U_{τ_i}. ESCOJAMOS UNA BASE DE N $e_1, \dots, e_n$ t.q $e_1 = v_i$

$$U_{\tau_i} = \mathrm{Spec}\, k[\tau_i^\vee \cap M] \cong \mathrm{Spec}\, k[(\mathbb{Z}_{\geq 0} e_1)^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$$

$$\cong \mathrm{Spec}(k[t]) \times \mathrm{Spec}\, k[t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$$

$$\cong \mathbb{A}^1 \times (k^*)^{n-1}$$

EN U_{τ_i}, $U_{\tau_i} \cap V(\tau_i) = \{0\} \times (k^*)^{n-1}$

$$\underset{\{t=0\}}{\overset{\|}{}}$$

EL ORDEN DE ANULACIÓN DE $\chi^u = \chi^{(u_1,\dots,u_n)}$ EN $\{0\} \times (k^*)^{n-1}$

ES $u_1 = \langle u, e_1 \rangle = \langle u, v_i \rangle$ ∎

LEMA: SI σ ES UN CONO PUNTEADO EN N ENTONCES $\forall$ TODO T-DIVISOR DE CARTIER D EN U_σ, EXISTE $u \in M$ t.q. $D = \operatorname{div}(\chi^u)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} : M &\longrightarrow \operatorname{Car}_T(X) \\ u &\longmapsto \operatorname{div}(\chi^u) = \sum \langle u, v_i \rangle D_i \end{aligned}$$

ES SOBREYECTIVA.

EJEMPLO: CONSIDERAR $\Delta = \langle e_2, 2e_1 - e_2 \rangle$, $\frac{1}{2}(1,1)$

$D_1 = V(\tau_1) = V(\langle e_2 \rangle)$, $D_2 = V(\tau_2) = V(\langle 2e_1 - e_2 \rangle)$

DADO $u \in M$, $u = (a, b)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= \langle u, e_2 \rangle D_1 + \langle u, 2e_1 - e_2 \rangle D_2 \\ &= \underbrace{bD_1 + (2a-b)D_2}_{\text{FORMA DE LOS DIVISORES}} \quad \operatorname{Car}_T(X) \end{aligned}$$

EN PARTICULAR, TENEMOS $2D_1, 2D_2$ SON DIVISORES DE CARTIER.

PERO D_1, D_2 SON DIVISORES DE WEIL PERO NO SON DIVISORES DE CARTIER.

$$\mathrm{Pic}(X) = \{0\} \quad , \quad \mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

<u>OBS</u>: $\mathrm{div}(\chi^u) = 0 \iff \langle u, v_i \rangle = 0 \ \forall i$ EN U_σ

$$\iff u \in \sigma^\perp$$

$\mathrm{div}(\chi^u)$ DETERMINA A u MODULO $\sigma^\perp \cap M$.

<u>PROPOSICIÓN</u>: SEA Δ UN ABANICO, $X = X(\Delta)$ Y $V_\Delta \subseteq N_\mathbb{R}$ EL SUBESPACIO GENERADO POR LOS CONOS DE Δ. ENTONCES EXISTE UN DIAGRAMA CONMUTATIVO CON LAS FILAS EXACTAS:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M/M\cap V_\Delta^\perp \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cart}_T(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & M/M\cap V_\Delta^\perp \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}D_i \arrow[r] & \mathrm{Cl}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

EN PARTICULAR, $\operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(X)) \leq \operatorname{rank}(\operatorname{Cl}(X)) = d - \dim V_\Delta$.

$X \setminus \bigcup D_i = T$ AFÍN SUAVE $\operatorname{Cl}(T) = 0$

$$\bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}D_i \longrightarrow \operatorname{Cl}(X) \longrightarrow \operatorname{Cl}(X \setminus \bigcup D_i)$$

$$\operatorname{Cl}(X \setminus \bigcup D_i) = \operatorname{Cl}(T) = 0$$

<u>EJEMPLO:</u> SEA $\sigma = \langle e_2, me_1 - e_2 \rangle$ $\left(\frac{1}{m}(1,1) \right)$

EL GRUPO $\operatorname{Cl}(X)$ GENERADO POR D_1, D_2, DONDE

$$D_1 = V(\tau_1) = V(\langle e_2 \rangle)$$

$$D_2 = V(\tau_2) = V(\langle me_1 - e_2 \rangle)$$

$$0 \sim \operatorname{div}(\chi^{e_1}) = \langle e_1, e_2 \rangle D_1 + \langle e_1, me_1 - e_2 \rangle D_2 = mD_2$$

$$0 \sim \operatorname{div}(\chi^{e_2}) = \langle e_2, e_2 \rangle D_1 + \langle e_2, me_1 - e_2 \rangle D_2 = D_1 - D_2$$

$$mD_2 \sim 0 \quad , \quad D_1 \sim D_2$$

$$\operatorname{Cl}(X) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{div}(\chi^u) = \mathrm{div}(\chi^{(a,b)})$$

$$= \langle u, e_2 \rangle D_1 + \langle u, me_1 - e_2 \rangle D_2$$

$$\mathrm{div}(\chi^u) = bD_1 + (am - b) D_2$$

$\mathrm{Cart}(X)$ ESTÁ GENERADO POR $bD_1, (am-b)D_2$

$$\mathrm{Pic}(X) = 0$$