Divisores, Line Bundles e Interseccón Tórica.

Yerko Torres Nova

PUC, Chile

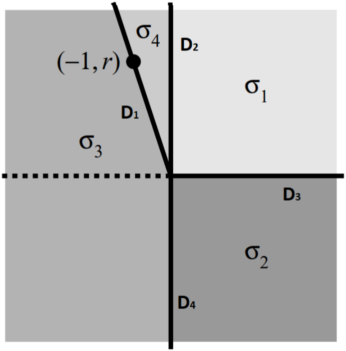
26 de noviembre de 2020

Sección 1

Para $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ considerar la superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_r = X(\Delta_r)$ asociada al fan Δ_r (figura) en $\mathbb{Z}^2$ con $\Delta_r(1) = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ y $\tau_i = Cono(v_i)$, donde

$$v_1 = -e_1 + re_2, v_2 = e_2, v_3 = e_1, v_4 = -e_2$$

Si $D_i = V(\tau_i)$, sabemos que $\mathrm{Div}_T(\mathbb{F}_r) = \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}D_i$



Los rayos de Δ_r generan $\mathbb{R}^2$ y por ello se tiene la sucesión exacta

$$0 \to M \to \mathrm{Div}_T(\mathbb{F}_r) \to \mathrm{Cl}(\mathbb{F}_r) \to 0.$$

Como $M = \mathbb{Z}^2 = \langle e_1^*, e_2^* \rangle_{\mathbb{Z}}$, entonces se incrusta en $\mathrm{Div}_T(\mathbb{F}_r)$ a ser el subgrupo generado por

$$\mathrm{div}(\chi^{e_1^*}) = \sum_{i=1}^{4} \langle e_1^*, v_i \rangle D_i = -D_1 + D_3$$

$$\mathrm{div}(\chi^{e_2^*}) = \sum_{i=1}^{4} \langle e_2^*, v_i \rangle D_i = rD_1 + D_2 - D_4.$$

Por esto $\mathrm{Cl}(\mathbb{F}_r) = \mathrm{Div}_T(\mathbb{F}_r)/M = \mathbb{Z}D_3 \oplus \mathbb{Z}D_4 = \mathbb{Z}^2$.

Sección 2

Sea $X = X(\Delta)$ variedad tórica asociada a un fan Δ en N cuyos rayos $\Delta(1) = \{\tau_i\}_{i=1}^{d}$ son generados por $\{v_i\}_{i=1}^{d} \subset N$ de forma minimal . Fijar $D_i = V(\tau_i)$, y $D = \sum_i a_i D_i \in \mathrm{Div}_T(X)$.

Theorem 1

Son equivalentes:

1. *D es Cartier*
2. *D es principal en los abiertos afines U_σ para cada $\sigma \in \Delta$.*
3. *Para cada $\sigma \in \Delta$, existe $m_\sigma \in M$ tal que $\langle m_\sigma, v_i \rangle = -a_i$ para cada $\tau_i \leq \sigma$.*
4. *Para cada $\sigma \in \Delta_{max}$, existe $m_\sigma \in M$ tal que $\langle m_\sigma, v_i \rangle = -a_i$ para cada $\tau_i \leq \sigma$.*

Proof: (2) $\Leftrightarrow$ (3) Sea $\sigma \in \Delta$, luego $D|_{U_\sigma} = \mathrm{div}(\chi^{u_\sigma})$ para algún $u_\sigma \in M$. Si $v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}$ son los rayos de Δ contenidos en σ, entonces se tiene

$$D|_{U_\sigma} = \mathrm{div}(\chi^{u_\sigma}) = \sum_{j=1}^{p} \langle u_\sigma, v_{i_j} \rangle D_i|_{U_\sigma}.$$

Como U_σ es abierto, esto obliga que $\langle u_\sigma, v_{i_j} \rangle = a_i$. Tomar $m_\sigma = -u_\sigma$. $\square$

Definición 1

En el caso D Cartier, la colección $\{m_\sigma\}_{\sigma \in \Delta}$ es la Cartier Data asociada a D. Es única modulo elementos de $\sigma^\perp \cap M$.

Ejemplo: En $X = U_\sigma$ con $\sigma = (e_2, ne_2 - e_1)$ sabemos que $\mathrm{Div}_T(X) = \mathbb{Z}D_1 \oplus \mathbb{Z}D_2$ y

$$\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Div}_T(X)/\langle nD_2, D_1 - D_2\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Un T-divisor de Weil $D = aD_1 + bD_2$ es Cartier si y sólo si existe $m_\sigma = \alpha e_1 + \beta e_2 \in M$ tal que

$$\langle m_\sigma, e_2\rangle = \beta = -a, \quad \langle m_\sigma, ne_1 - e_2\rangle = n\alpha - \beta = -b$$

En este caso m_σ existe si y sólo si $a + b \equiv 0 \mod n$, y

$$m_\sigma = -\left(\frac{a+b}{n}e_1 + ae_2\right).$$

Esto justifica de otra forma que $\mathrm{Pic}(X) = 0$.

Ejemplo: La superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_r$ es suave, y por ello

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{F}_r) \cong \mathrm{Pic}(\mathbb{F}_r),$$

$$\mathrm{Div}_T(\mathbb{F}_r) = \mathrm{Cart}_T(\mathbb{F}_r).$$

Luego todo $D = aD_3 + bD_4 \in \mathrm{Div}_T(\mathbb{F}_r)$ tiene asociada la Cartier Data

$$m_1 = (-a, 0), m_2 = (-a, b), m_3 = (rb, b), m_4 = (0, 0),$$

con $m_i = m_{\sigma_i} \in M$.

Sección 3

Sea Δ fan en N con rayos generados minimalmente por $\{v_1, \ldots, v_d\}$ y $X = X(\Delta)$. Sea $D \in \text{Cart}_T(X)$ con data $\{m_\sigma\}_\Delta$. Definimos la función soporte en D por

$$\psi_D : |\Delta| \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle m_\sigma, v \rangle, \text{ si } v \in \sigma.$$

Proposición 1

1. *La restricción de ψ_D a cada $\sigma \in |\Delta|$ es lineal.*
2. $\psi_D(|\Delta| \cap N) \subseteq \mathbb{Z}$.
3. *Si $D = \sum a_i D_i$, entonces $\psi_D(v_i) = -a_i$.*

Además si $\psi : |\Delta| \to \mathbb{R}$ es otra función cumpliendo (1) y (2), entonces $\psi = \psi_{D'}$ para un único $D' \in Cart_T(X)$.

Proof: Definir $D' = -\sum \psi(v_i) D_i \in \mathrm{Div}_T(X)$. Sea $\sigma \in \Delta_{max}$ y $v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}$ rayos minimales en σ. Luego

$$D'|_{U_\sigma} = -\sum_{j=1}^{s} \psi(v_{i_j}) D_i.$$

Como ψ es lineal en σ, se extiende a un morfismo $\mathbb{Z}$-lineal $\psi : N_\sigma \to \mathbb{Z}$. Se puede probar el isomorfismo

$$M/\sigma^\perp \cap M \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_\sigma, \mathbb{Z}), \quad m \mapsto \langle m, \cdot \rangle.$$

Luego existe único $m_\sigma \in M$ tal que $\psi(v_{i_j}) = \langle m_\sigma, v_{i_j} \rangle$. La colección $\{m_\sigma\}_{\sigma \in \Delta}$ define la Cartier data para D', así $\psi = \psi_{D'}$. $\square$

Definición 2

1. *Sea X variedad sobre un cuerpo k. Un haz invertible $\mathcal{L}$ sobre X es muy amplio si admite secciones globales $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ que inducen una inmersión*

$$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k, \quad x \mapsto [s_0(x), \ldots, s_n(x)].$$

   tal que $\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.
2. *Un haz invertible $\mathcal{L}$ sobre X es amplio si existe $m > 0$ entero tal que $\mathcal{L}^{\otimes m} = \underbrace{\mathcal{L} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}}_{m}$ sea muy amplio.*
3. *Un divisor $D \in Cart(X)$ es amplio si el haz $\mathcal{O}_X(D)$ es amplio.*

Theorem 2

Sea $X = X(\Delta)$ variedad tórica con Δ completo. Sea $D \in Cart_T(X)$. Se tiene

$$\begin{aligned} D \text{ es amplio } &\Leftrightarrow \psi_D(u) < \langle m_\sigma, u\rangle \text{ para todo } v \notin \sigma \text{ con } \sigma \in \Delta_{max} \\ &\Leftrightarrow \psi_D \text{ es estrictamente concava ,i.e., concava} \\ &\quad\quad y\ \forall u, v \in N_{\mathbb{R}} \text{ en conos distintos de } \Delta_{max} \text{ se tiene} \\ &\quad\quad\quad\quad \psi_D(u+v) > \psi_D(u) + \psi_D(v). \end{aligned}$$

Más aún, si $\dim \sigma = n \geq 2$ para todo $\sigma \in \Delta_{max}$, entonces mD es muy amplio para todo $m \geq n-1$.

Remark: Mustata ocupada concavidad otros autores usan (upper) convexidad.

Ejemplo: Como $\mathrm{Cl}(\mathbb{F}_r) = \mathrm{Pic}(\mathbb{F}_r)$, entonces todo haz invertible $\mathcal{L}$ sobre $\mathbb{F}_r$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_r}(aD_3 + bD_4)$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$ únicos. Sobre cada cono maximal en Δ_r, la función soporte de $D = aD_3 + bD_4$ queda determinada por

$$\psi_D(x,y) = \begin{cases} -ay & \text{en} & \sigma_1 = C(e_1, e_2) \\ -ax + by & \text{en} & \sigma_2 = C(e_1, -e_2) \\ b(rx + y) & \text{en} & \sigma_3 = C(-e_2, -e_1 + re_2) \\ 0 & \text{en} & \sigma_4 = C(-e_1 + re_2, e_2) \end{cases}$$

Se puede probar que ψ_D es estrictamente convexa si y sólo si $a > 0, b > 0$. Luego

$$D = aD_3 + bD_4 \text{ es amplio } \Leftrightarrow a, b > 0.$$

En general si $D = \sum_{i=1}^{4} a_i D_i \in \mathrm{Div}_T(\mathbb{F}_r)$. En $\mathrm{Cl}(\mathbb{F}_r)$ bajo las relaciones $rD_1 + D_2 = D_4$ y $D_1 = D_3$, podemos escribir $D = (a_1 + a_3 - ra_2)D_3 + (a_2 + a_4)D_4$ y concluir

$$D \text{ es amplio } \Leftrightarrow a_1 + a_3 > ra_2, \quad a_4 + a_2 > 0.$$

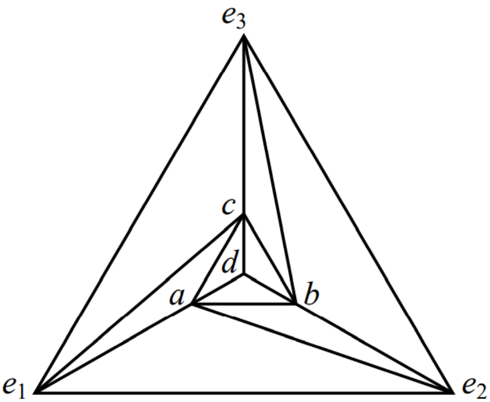
Ejemplo: Considerar Δ el fan $\mathbb{R}^3$ definido por los rayos $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$, y al octante positivo hacer la subdivisión estelar al agregar los rayos definidos por

$$a = (2,1,1), b = (1,2,1), c = (1,1,2), d = (1,1,1).$$

En $X = X(\Delta)$, tomamos un T-divisor Cartier $D = \sum a_i D_i$ y consideramos $D' = D + \mathrm{div}(\chi^m) \equiv D$ con $m = (-a_{e_1}, -a_{e_2}, -a_{e_3})$. Si $\psi_{D'}$ es la función soporte y asumimos D amplio, se puede probar la siguiente imposibilidad

$$\psi_{D'}(a) > \psi_{D'}(b) > \psi_{D'}(c) > \psi_{D'}(a).$$

Por esto X no posee divisores amplios, y así X es una variedad suave completa no proyectiva.


e_3
c
d
a
b
e_1
e_2

Sección 4

Sea D divisor de Cartier y C curva irreducible completa suave en una variedad normal X. Se define el número de intersección entre D y C por

$$D \cdot C = \deg(D|_C) = \deg(i^*\mathcal{O}_X(D)) \in \mathbb{Z},$$

donde $i : C \hookrightarrow X$ es la inclusión. Si E es otro divisor de Cartier, se tienen las propiedades

1. $(D + E) \cdot C = D \cdot C + E \cdot C$.
2. Si $E \equiv D$, entonces $D \cdot C = E \cdot C$.
3. Si $D \cap C$ es finito y D con C se tocan *transversalmente*, entonces $D \cdot C = \#D \cap C$.

Theorem 3

Sea $X = X(\Delta)$ variedad tórica y $\tau = \sigma \cap \sigma'$ una pared, es decir $\sigma, \sigma' \in \Delta_{max}$. Considerar $N(\tau) = N/N_\tau = \mathbb{Z}$ con la proyección canónica $\pi : N_\mathbb{R} \to N(\tau)_\mathbb{R}$. Sea $u' \in \sigma' \cap N$ tal que $\pi(u')$ es generador minimal de $\pi(\sigma')$.

Tomar $D \in Cart_T(X)$ y considar $C = V(\tau)$ curva invariante por T en X. Si $\{m_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ es la Cartier data de D, entonces

$$D \cdot C = \langle m_\sigma - m_{\sigma'}, u' \rangle \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: En $\mathbb{F}_r$ consideremos $D = D_3$ con Cartier data asociada

$$\{m_1 = (-1,0), m_2 = (-1,0), m_3 = 0, m_4 = 0\}$$

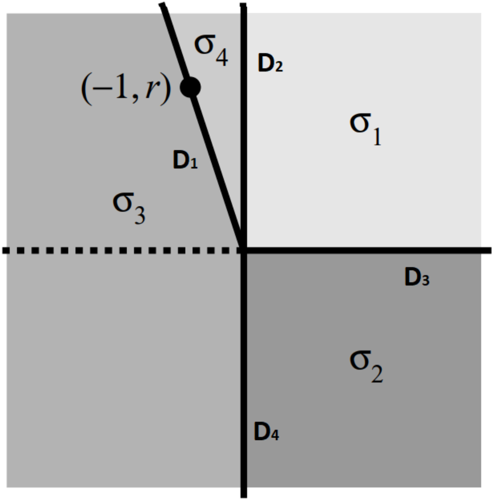
y $C = D_4 = V(\tau_4)$. Se tiene $N(\tau_4) = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(-e_2) = \mathbb{Z}e_1$. Como $\tau_4 = \sigma_2 \cap \sigma_3$, entonces la imagen de σ_3 en $N(\tau)$ es generada minimalmente por $(-1,0)$. Se tiene

$$D_3 \cdot D_4 = \langle m_2 - m_3, (-1,0)\rangle = \langle(-1,0),(-1,0)\rangle = 1$$

Análogamente, y junto a las equivalencias $D_1 \equiv D_3$ y $D_2 \equiv -rD_3 + D_4$ obtenemos

$$D_1^2 = 0, \quad D_2^2 = -r, \quad D_3^2 = 0, \quad D_4^2 = r.$$

En general $(aD_3 + bD_4)^2 = 2ab + rb^2$.


σ4
(−1, r)
D2
σ1
D1
σ3
D3
σ2
D4

.

Sección 5

Supongamos X variedad suave de dimensión n. Sea $D = D_1 + ... + D_d$ un divisor reducido y con SNC (simple normal crossing), es decir, cada D_i es suave y localmente D queda definido por la ecuación $y_1 y_2 .... y_k = 0$ en coordenadas locales $y_1, ..., y_n$ de X con $k \leq n$.

El haz Ω^1_X de diferenciales sobre X, es un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente generado por $dy_1, ..., dy_n$ con $y_1, ..., y_n$ coordenadas locales de X.

Definimos el haz de diferenciales logaritmicas a través de D a ser el subhaz $\Omega^1_X(\log D)$ de $\Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} R(X)$ definido localmente del siguiente modo: Si $x \in X$ está en $D_{i_1}, \ldots, D_{i_m}$, entonces $\Omega^1_X(\log D)$ es generado sobre $\mathcal{O}_X$ por

$$\frac{dy_1}{y_1}, \ldots, \frac{dy_m}{y_m}, y_{m+1}, \ldots, y_n$$

1. $\Omega^1_X(\log D)$ es localmente de rango n
2. Se tiene una sucesión exacta residual

$$0 \to \Omega^1_X \to \Omega^1_X(\log D) \to \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}_{D_i} \to 0.$$

Sea ahora $X = X(\Delta)$ variedad tórica suave y $D = D_1 + ... + D_d$ el divisor reducido asociado a los rayos de Δ.

1. D es SNC
2. $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X \cong \Omega^1_X(\log D)$

Estas dos propiedades junto con la sucesión residual, se combinan usando el Snake's Lemma para dar la sucesión exacta

$$0 \to \Omega^1_X \to \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}_X(-D_i) \to \mathcal{O}_X^{\oplus(d-n)} \to 0.$$

Cada uno localmente de rangos $n, d, d-n$ respectivamente.

Al tomar determinantes en la sucesión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(-D_1 - \dots - D_d) &= \bigwedge^{d} \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}_X(-D_i) \\ &= \bigwedge^{n} \Omega^1_X \otimes \bigwedge^{d-n} \mathcal{O}_X^{\oplus(d-n)} \\ &= \omega_X\end{aligned}$$

Obteniendo el divisor canónico $K_X = -D_1 - \dots . - D_d$.

Ejemplo: En $\mathbb{F}_r$ se tiene

$$K_{\mathbb{F}_r} = -(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) \equiv (r-2)D_3 - 2D_4$$

Luego $K_{\mathbb{F}_r}^2 = -2 \cdot 2(r-2) + 4r = 8.$

GRACIAS!