

Singularidades Log Terminal: Superficies Marcos Canedo

Definición. S variedad normal con $k_S - \mathbb{Q}$ cartier.

$\epsilon: \hat{S} \rightarrow S$ una res. de singularidades.

Luego:

$$k_{\hat{S}} = f^*(k_S) + \sum a_i E_i$$

Decimos que las singularidades con respecto a la resolución ϵ son:

Terminales : $a_i > 0$

Carónicas : $a_i \geq 0$ para todo i

Log Terminales : $a_i > -1$

Sumario:

I. Singularidades Terminales

II. Singularidades Carónicas

III. Singularidades Log Terminales

Aviso: Supondremos todas las superficies normales salvo que se indique lo contrario.

I. Singularidades Terminales

(Matsuki, Thm 4-6-2) (Resolución Minimal, Superficies)

S superficie normal, entonces existe:

$$\pi: \hat{S} \rightarrow S$$

resolución de singularidades tal que $K_{\hat{S}}$ es π -nef:

$$K_{\hat{S}} \cdot E \geq 0, \forall E \text{ curva } \pi(E) = \text{pt}$$

Además tiene las siguientes propiedades:

i) Es absolutamente minimal:

$$\begin{array}{ccc} & \hat{S} & \\ \exists \tau \nearrow & & \downarrow \pi \\ W & \xrightarrow{g} & S \\ \text{bir} & & \\ \text{propio} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \tau \text{ bir. propio} \\ g = \pi \circ \tau \end{array}$$

ii) $K_{\hat{S}} = \pi^* K_S + \sum a_i E_i$ se tiene:
($\forall i$) ($a_i = 0$) ó ($\forall i$) ($a_i < 0$)

Obs. \hat{S} es único salvo isomorfismo, luego es la resolución minimal del S .

Obs. \hat{S} no tiene curvas (-1) racionales π -contraíbles.
ie. $E_i^2 \neq -1$

Corolario. Las singularidades terminales son puntos suaves.

II. Singularidades Canónicas

(Matsuki, Thm 4-6-1) (Curvas Contraíbles tienen autointer. neg.)

Sea $p \in S$ germe de sup. normal: $f: V \rightarrow S$

morfismo propio de sup. V no singular.

Luego $f^{-1}(p)$ es conexo y tiene autointersección negativa: $D^2 < 0$, $D = \sum d_i E_i$ donde los

$E_i \subseteq f^{-1}(p)$ son divisores excepcionales.

Observación: $\pi: \hat{S} \rightarrow S$ resolución minimal.

+ Sing. Canónica $\Rightarrow K_{\hat{S}} = \pi^* K_S$
 + Res. Minimal

Thm. Curvas Contractibles $\Rightarrow E_i$ es (-2) curva
 + Fórmula de Gen. Arit $\Rightarrow K_S E_i = 0, E_i^2 = -2, E_i \simeq \mathbb{P}^1$

Detalle de Cálculo:

Sing. Canónica $\Rightarrow a_i \geq 0 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow K_{\hat{S}} = \pi^* K_S$

Res. Minimal $\Rightarrow a_i \leq 0$

Luzo: $K_S E_i = \pi^* K_S E_i = 0$ (Fórmula de Proyección)

Thm. Curvas Contractibles $\Rightarrow E_i^2 < 0$

Res. Minimal $\Rightarrow E_i^2 \neq -1$

Fórmula de Gen. Arit. $0 \leq g_{E_i} = \frac{1}{2} E_i (E_i + K_{\hat{S}}) + 1$

En particular: $E_i (E_i + K_{\hat{S}}) \geq -2 \Rightarrow E_i^2 \geq -2$

Se concluye $-2 \leq E_i^2 < -1 \Rightarrow E_i^2 = -2$

Calculando género: $g_{E_i} = 0 \Rightarrow E_i \simeq \mathbb{P}^1$

(Kollar - Mori, Thm 4.20) (Caracterización Sing. Canónicas)

Sea $(0 \in X)$ el germe de una singularidad de una superficie normal. Sea equivalentes:

- (1) $(0 \in X)$ es canónica
- (2) $(0 \in X)$ es Du Val
- (3) $(0 \in X)$ es analíticamente isomorfo a una sing. definida por una de las ecuaciones:

A_n	$x^2 + y^2 + z^{n+1}$	Cíclico $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$	$\circ - \circ \dots \circ$
D_n	$x^2 + y^2 z + z^{n-1}$	Dihedral Binario	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \dots \circ \\ \\ \circ \end{array}$
E_6	$x^2 + y^3 + z^4$	Tetrahedral Binario	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \\ \circ \end{array}$
E_7	$x^2 + y^3 + yz^3$	Octahedral Binario	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \\ \circ \end{array}$
E_8	$x^2 + y^3 + z^5$	Icosahedral Binario	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \\ \circ \end{array}$

Pizawa
Aux
(2)

(Kollar-Mori, Runk 4.21) (Corac. Sing. de DuVal)

Las singularidades de DuVal son cocientes de \mathbb{C}^2 por subgrupos finitos de $Sh(2, \mathbb{C})$.

(Reid, Ex 10) (Representación Grupos de $Sh(2, \mathbb{C})$):

$$A_n = \begin{pmatrix} \epsilon_n & 0 \\ 0 & \epsilon_n^{-1} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\epsilon_5 + \epsilon_5^4 & \epsilon_5^2 - \epsilon_5^3 \\ \epsilon_5^2 - \epsilon_5^3 & \epsilon_5 - \epsilon_5^4 \end{pmatrix}$$

Cíclico de Orden n : A_n

Dihedral Binario BD_{4n} : A_n, B

Tetraedral Binario BT_{24} : A_4, B, C

$$A_4^2 = B^2 = (AB)^2 = C^3 = -1$$

Octahedral Binario BO : B, C, D ; rotar $D^2 = A_4$

Icosahedral Binario: A_5, B, E

III. Singularidades log Terminal

(Kollar-Mori, Prop. 4.18) (Corac. Log. Terminal)

Para un germeu $(0 \in X)$ de una sup. normal, son equivalentes:

- (1) $(0 \in X)$ es log Terminal
- (2) $(0 \in X)$ es cociente de $(0 \in \mathbb{C}^2)$ por un grupo finito

(Matsuki, Prop. 4-5-1) (Cubrimiento Canónico)

Sea $p \in X$ el germeu de una variedad normal tal que

K_X es \mathbb{Q} -Cartier. Sea:

$$r := \text{índice de } K_X := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid nK_X \text{ es Cartier} \}$$

Entonces existe un morfismo finito:

$$c: \tilde{X} \rightarrow X \quad \text{tal que:}$$

- (1) \tilde{X} es variedad normal con $c^{-1}(p) = q$ un punto.
- (2) La extensión de cuerpos de funciones $\mathbb{C}(\tilde{X})/\mathbb{C}(X)$ es Galois y el grupo de Galois $G \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ actúa en \tilde{X} sobre X .
- (3) $K_{\tilde{X}}$ es Cartier con índice 1.

(Matsuki, Thm 4-6-18) (Corac. Log. Terminal como Sing. Coc.)

Sea $(p \in S)$ germeu de singularidad log terminal en dimensión 2.

- i) $p \in S$ es una singularidad racional (que se puede resolver usando blow-ups) y el divisor canónico K_S \mathbb{Q} -Cartier.
- ii) Sea
$$c: \tilde{S} \rightarrow S$$
$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \mathfrak{p} \end{array}$$
 el cubrimiento canónico con grupo de Galois $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ donde r es el índice de $p \in S$. Entonces $\mathfrak{q} \in \tilde{S}$ tiene sólo singularidades canónicas.
- iii) Como $\mathfrak{q} \in \tilde{S}$ es germeu de singularidades canónicas en dimensión 2, es un cociente de \mathbb{C}^2 por un grupo finito $H \subseteq \text{SL}(2, \mathbb{C})$ sin quasi-reflexivos (ie. ningún elemento no trivial de H tiene un punto fijo excepto el origen)

De esto sigue que se tiene los cobrimientos:

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{S} \setminus \{q\} \rightarrow S \setminus \{p\}$$

Que nos induce la siguiente sucesión exacta de grupos fundamentales

$$\{e\} = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow H = \pi_1(\tilde{S} \setminus \{q\}) \rightarrow G = \pi_1(S \setminus \{p\}) \rightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

El grupo G actúa en \mathbb{C}^2 naturalmente y linealmente; escogiendo un sistema de coordenadas adecuado se puede considerar $G \subseteq GL(2, \mathbb{C})$ grupo finito sin quasi-reflexivos.

iv) Recíprocamente, dado $G \subseteq GL(2, \mathbb{C})$ finito, sin quasi-reflexivos, la singularidad cociente $(0 \in \mathbb{C}^2)/G$ tiene solamente singularidades log terminal.

(Matsuki, Thm 4-6-19) (linealización de Acción de Grupo)

(Brieskorn Lemma 2.2; Kawamata, Lemma 9.9)

Sea G grupo finito actuando fielmente en el germe $0 \in \mathbb{C}^n$ del origen o más general, actuando fielmente en el germe de una variedad afín $0 \in X \subset \mathbb{C}^n$ fijando el origen tq el espacio tangente de Zariski es isomorfo al espacio ambiente \mathbb{C}^n .

$$\text{ie } \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{X,0} / \mathfrak{m}_{X,0}^2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$$

Entonces escogiendo un sistema de coordenadas (z_1, \dots, z_n) adecuado, la acción de G se puede linealizar ie.

$$G \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \text{ embedding}$$

tal que:

$$g^t((z_1, \dots, z_n)^t) = \alpha(g)(z_1, \dots, z_n)^t, \quad \forall g \in G$$

(Matsuki, Thm 4-6-20) (Clasificación de Subgrupos Finitos de $GL(2, \mathbb{C})$)

Sea $G \leq GL(2, \mathbb{C})$ sin quasi-reflexivos. Entonces G es dado por la tabla salvo conjugación.

Notación: $C_{n,q} := \left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i q}{n}} \end{pmatrix} \right\}$ con $0 < q < n$, $(n, q) = 1$

$Z_k :=$ Grupo Cíclico de Orden k en $ZL(2, \mathbb{C})$, el centro de $GL(2, \mathbb{C})$.

$C_k :=$ Grupo Cíclico de orden k en $SL(2, \mathbb{C})$

$D_k :=$ Grupo Dihedral binario de orden $4k$

$T :=$ Grupo Tetrahedral binario

$O :=$ Grupo Octahedral Binario

$I :=$ Grupo Icosahedral Binario

$$(H_1, N_1; H_2, N_2) = \left\{ h \in GL(2, \mathbb{C}) \mid h = h_1 h_2, h_i \in H_i \right. \\ \left. \text{con } h_1 \bmod N_1 = h_2 \bmod N_2 \right\}$$

En la tabla H representa el kernel de la sucesión exacta:

$$\{e\} \rightarrow H \rightarrow G \xrightarrow{\det} \mu_r \rightarrow \{1\}$$

donde $\mu_r \subseteq \mathbb{C}^\times$ es el grupo de r -ésima raíces de la unidad.

Se tiene la Clasificación

- Tipo Cíclico
- Tipo Dihedral
- Tipo (3,1)
- Tipo (3,2)

El grafo dual se lee:

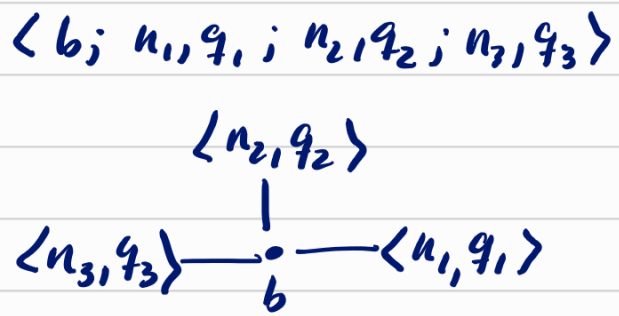
$\langle n, q \rangle$ como la fracción de Herzfeld $\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_n]$

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots}}$$

Entonces:

$$-\frac{b_1}{1} - \frac{b_2}{\dots} - \frac{b_3}{\dots} - \frac{b_4}{\dots} - \frac{b_{n-1}}{\dots} - \frac{b_n}{\dots}$$

De manera similar los otros tipos de simplicidades se leen:



Tipo	G	Grafo Dual	H	m	r
A	C_n, q $0 < q < n, (n, q) = 1$	$\langle n, q \rangle$	C_m	$(n, q+1)$	$\frac{n}{m}$
D-1	$(Z_{2m}, Z_{2m}; D_n, D_n)$ $(m, 2) = 1$ $(m, n) = 1$	$\langle b; 2, 1; 2, 1; n, q \rangle$	D_n	$(b-1)n - q$	m
D-2	$(Z_{4m}, Z_{2m}; D_n, C_{2n})$ $(m, 2) = 2$ $(m, n) = 1$	$\langle b; 2, 1; 2, 1; n, q \rangle$	C_{2n}	$(b-1)n - q$	2m
E_6^{-1}	$(Z_{2m}, Z_{2m}; T, T)$ $(m, 6) = 1$	$\langle b; 2, 1; 3, 1; 3, 1 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 2; 3, 2 \rangle$	T	$6(b-2) + 5$ $6(b-2) + 1$	m
E_6^{-2}	$(Z_{6m}, Z_{2m}; T, D_2)$ $(m, 6) = 3$	$\langle b; 2, 1; 3, 1; 3, 2 \rangle$	D_2	$6(b-2) + 3$	3m
E_7	$(Z_{2m}, Z_{2m}; 0, 0)$ $(m, 6) = 1$	$\langle b; 2, 1; 3, 1; 4, 1 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 1; 4, 3 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 2; 4, 1 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 2; 4, 3 \rangle$	0	$12(b-2) + 11$ $12(b-2) + 5$ $12(b-2) + 7$ $12(b-2) + 1$	m
E_8	$(Z_{2m}, Z_{2m}; I, I)$ $(m, 30) = 1$	$\langle b; 2, 1; 3, 1; 5, 1 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 1; 5, 2 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 1; 5, 3 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 1; 5, 4 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 2; 5, 1 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 2; 5, 2 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 2; 5, 3 \rangle$ $\langle b; 2, 1; 3, 2; 5, 4 \rangle$	I	$30(b-2) + 29$ $30(b-2) + 23$ $30(b-2) + 17$ $30(b-2) + 11$ $30(b-2) + 19$ $30(b-2) + 13$ $30(b-2) + 7$ $30(b-2) + 1$	m

De esta manera se puede usar:

Tipo Cíclico: $\begin{array}{c} -b_1 \quad -b_2 \quad \dots \quad -b_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \end{array}$

Tipo Dihedral: $\begin{array}{c} -2 \\ | \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ -2 \quad -b \quad -b_1 \quad \dots \quad -b_r \end{array}$

Tipo (3,1): $\begin{array}{c} -2 \\ | \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ -2 \quad -2 \quad -b \quad -b_1 \quad \dots \quad -b_r \end{array}$

Tipo (3,2): $\begin{array}{c} -2 \\ | \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ -3 \quad -b \quad -b_1 \quad \dots \quad -b_r \end{array}$

El Ejemplo de los Casos \overline{TF}_n :

De nuevo, los Casos \overline{TF}_n
; Resultan ser singularidades cíclicas, $\langle n, 1 \rangle$!

Observación: \overline{TF}_n es canónica $\Leftrightarrow n=2$

Bibliografía.

1. Matsuki, 2002; Introduction to Mori Program
2. Kollar-Mori, 98; Birational Geometry of Algebraic Varieties.
3. Reid; The Du-Val Singularities
4. Kawamata, 88; Crepant Blowing Up of 3-Dimensional Canonical Singularities and its application to degeneration of Surfaces.
5. Brieskorn, 68; Rationale Singularitäten komplexer Flächen.

Anexo: Cálculo de la fórmula del Índice

Sea $S' \xrightarrow{\epsilon} S$ resolución de singularidad cíclica del S ,
donde:

$$K_{S'} \equiv \epsilon^* K_S + \sum_{i=0}^l d_i E_i$$

Los d_i son las discrepancias.

El índice de S' se define como:

$$r := \min \{ s \in \mathbb{N} \mid s K_S \text{ es Cartier} \}$$

Ahora bien, observar que si $s \in \mathbb{N}$ es tal que:

$$s(K_{S'} - \sum_{i=0}^l d_i E_i) = s \epsilon^* K_S = \epsilon^* s K_S$$

es un divisor integral en S' .

Entonces:

$$(\forall E_j) (s(K_{S'} - \sum d_i E_i) E_j = \epsilon^* s K_S \cdot E_j = 0)$$

Podemos concluir por Matsuki, Lemma 4-6-8 que:

$e(K_{S'} - \sum d_i E_i) = \epsilon^* D$ para algún divisor de Cartier D
en S y como $s K_S = \pi_* \pi^* K_S = \pi_* \pi^* D = D$
se concluye que $s K_S$ es divisor de Cartier.

Entonces se concluye:

$$\begin{aligned} s K_S \text{ es Cartier} &\Leftrightarrow s(K_{S'} - \sum d_i E_i) \text{ es Cartier} \\ &\Leftrightarrow s \sum d_i E_i \text{ es Cartier} \\ &\Leftrightarrow s d_i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Por tanto se concluye que:

$$r = \min \{ s \in \mathbb{N} \mid (\forall i)(s d_i \in \mathbb{Z}) \}$$

Las discrepancias determinan el índice.

I. Índice de Singularidades Cíclicas

1. Cálculo de Discrepancias.

Sea $S' \xrightarrow{\epsilon} S$ la res. minimal de una singularidad cíclica, cuyo diagrama dual es:

$$\begin{array}{ccccccc} -e_1 & -e_2 & & \dots & & -e_n & \\ \circ & \circ & & \dots & & \circ & \\ E_1 & E_2 & & \dots & & E_n & \end{array}$$

Se tiene entonces que:

$$K_{S'} \equiv \epsilon^* K_S + \sum_{i=1}^l d_i E_i$$

Entonces se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\left(K_{S'} - \sum_{i=1}^l d_i E_i \right) E_j = 0$$

Usando fórmula de adjunción se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} d_{i-1} - e_i d_i + d_{i+1} = 2 - e_i & \text{para } 1 < i < n \\ -e_1 d_1 + d_2 = 2 - e_1 \\ d_{n-1} - e_n d_n = 2 - e_n \end{cases}$$

Se tiene entonces:

$$M_n = \begin{pmatrix} e_1 - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & e_1 - 2 \\ -1 & e_2 - 1 & 0 & & \vdots & & & 1 & e_2 - 2 \\ 0 & -1 & e_3 - 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & e_3 - 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -1 & e_n & 1 & e_n - 2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema lineal usando el método de Cramer nos queda:

$$d_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Primera Fórmula de Cálculo del Índice

Dado Δ es el determinante de la matriz de intersección de sistema; Δ_i es el determinante reemplazando la última columna por la i -ésima.

Lema. Sean $\frac{a_1}{b}, \dots, \frac{a_n}{b} \in \mathbb{Q}^+$ entonces el mínimo entero $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \frac{a_i}{b} \in \mathbb{Z}$ es dado por la fórmula:

$$r = \frac{b}{\text{mcd}(a_1, \dots, a_n, b)}$$

Demostración.

$$r \frac{a_i}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \mid r a_i \Leftrightarrow b \mid r a_i, b \mid r b$$

$$\Leftrightarrow b \mid \text{mcd}(r a_1, \dots, r a_n, r b) = r \text{mcd}(a_1, \dots, a_n, b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{\text{mcd}(a_1, \dots, a_n, b)} \mid r \quad \forall i$$

Conclusión.

El índice viene dado por:

$$r = \frac{\Delta}{\text{mcd}(\Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta)}$$

3. Relacionando discrepancias con fracciones continuas

Lema. Sean $\frac{m}{q} = [e_1, \dots, e_l]$, $\frac{m'}{q'} = [e_1, \dots, e_l]$

Entonces $m = m'$ y $qq' \equiv 1 \pmod{m}$.

Demostración.

Definimos la sucesión de α_i por:

$$\alpha_0 = m, \alpha_1 = q, \alpha_{i+1} = e_i \alpha_i - \alpha_{i-1}$$

Notar que: $\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} = [e_i, \dots, e_l]$

Esta construcción termina cuando $\alpha_l = 1$, $\alpha_{l+1} = 0$

Por otro lado, definir:

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = 1 \text{ y } \beta_{i+1} = e_i \beta_i - \beta_{i-1}$$

de nuevo esto coincide con la construcción de la fracción continua, pero al revés, es decir:

$$\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} = [e_i, \dots, e_l]$$

En particular $\beta_l = q'$, $\beta_{l+1} = m'$.

Usando inducción probaremos que para $i \geq 1$ se tiene que $q\beta_i \equiv \alpha_i \pmod{m}$.

Esto es cierto por definición para $i=1, 0$ por definición.

huy:

→ usando inducción

$$q\beta_{i+1} = qe_i \beta_i - q\beta_{i-1} \equiv e_i \alpha_i - \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$$

En particular $qq' \equiv 1 \pmod{m}$, $qm' \equiv 0 \pmod{m}$.

Por coprimalidad de $m, q \Rightarrow m | m'$, repitiendo el argumento se muestra que $m' | m$ luego $m = m'$.

Proposición. Sea $x \in S$ singularidad cociente cíclica
 del tipo $\frac{m}{q} = [e_1, \dots, e_l]$ con $\epsilon: S' \rightarrow S$ resolución
 minimal con conas excepcionales E_1, \dots, E_l .
 Sean α_i, β_i como en el lema anterior.

Entonces:

$$d_i = - \left(1 - \frac{\alpha_i + \beta_i}{m} \right) = \frac{-m + \alpha_i + \beta_i}{m}$$

para $i=0, \dots, l+1$ donde definimos $d_0 = d_{l+1} = 0$

Demostración. Será suficiente mostrar que éstos números
 son solución al sistema lineal.

Para $i=0, i=l+1$ es trivial.

Para $i=1, \dots, l$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_{i-1} - e_i d_i + d_{i+1} &= - \left(1 - \frac{\alpha_{i-1} + \beta_{i-1}}{m} \right) + e_i \left(1 - \frac{\alpha_i + \beta_i}{m} \right) - \left(1 - \frac{\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}}{m} \right) \\ &= e_i - 2 + \frac{(\alpha_{i+1} - e_i \alpha_i + \alpha_{i-1}) + (\beta_{i+1} - e_i \beta_i + \beta_{i-1})}{m} = e_i - 2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario $d_i = \frac{\alpha_i + \beta_i - m}{m} = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

Proposición. $\Delta = (-1)^l m$

Definimos $\Delta^{(k)} = \begin{vmatrix} e_1 & -1 & & & \\ -1 & e_2 & -1 & & \\ & -1 & e_3 & -1 & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & e_k \end{vmatrix}$

Notar que:

$$\Delta^{(k+2)} = (-1)^{k+1} \Delta^{(k+1)} + (-1)^k \Delta^{(k)}$$

Dado

$$\Delta^{(1)} = e_1, \quad \Delta^{(2)} = e_1 e_2 - 1 = e_1 [e_2, e_1]$$

Inductivamente se muestra que:

$$\begin{aligned}\Delta^{(l)} &= (-1)^l [e_1] [e_2, e_1] \cdots [e_l, \dots, e_1] \\ &= (-1)^l \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_2} \cdots \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = \frac{\beta_{k+1}}{\beta_1} = (-1)^l m\end{aligned}$$

Así $\Delta = \Delta^{(l)} = (-1)^l m \quad \square$

Corolario. $\alpha_i + \beta_i + (-1)^{l+1} m = (-1)^l \Delta_i$

Corolario.

$$\gcd(\Delta_1, \dots, \Delta_l, \Delta) = \gcd(q+1, m)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\gcd(\Delta_1, \dots, \Delta_l, \Delta) &= \gcd(\alpha_1 + \beta_1 + (-1)^{l+1} m, \dots, \alpha_l + \beta_l + (-1)^{l+1} m, m) \\ &= \gcd(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_l + \beta_l, m)\end{aligned}$$

Observación $\alpha_{i+1} = e_i \alpha_i - \alpha_{i-1}$

$$\beta_{i+1} = e_i \beta_i - \beta_{i-1}$$

Luego:

$$\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} = e_i (\alpha_i + \beta_i) - (\alpha_{i-1} + \beta_{i-1})$$

Por tanto:

$$\gcd(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_l + \beta_l, m) = \gcd(\alpha_1 + \beta_1, m)$$

Pero $\alpha_1 + \beta_1 = q+1$ de donde se concluye \square

Corolario. $r = \frac{m}{\gcd(q+1, m)}$

Nota Final: Para el caso general Brieskorn reduce el caso general a uno cíclico contrayendo las (-2) curvas.

2. Índice para Singularidades del Tipo Dihedral

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & -2 & L_1 & & & & \\
 & \cdot & | & E & E_1 & \dots & E_l \\
 L_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 -2 & -e & -e_1 & \dots & -e_l & &
 \end{array}
 \xrightarrow{\epsilon}
 \begin{array}{ccccccc}
 E & E_1 & & & & & E_l \\
 \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\
 -(e-1) & -e_1 & & & & & -e_l
 \end{array}
 \end{array}$$

donde ϵ contrae las (-2) curvas.

Se observa mediante contracciones parciales:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 -2 \\
 \cdot \\
 | \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 -2 \quad -e
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 -2 \quad -[e, 2]
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 -[[e, 2], 2]
 \end{array}
 \end{array}$$

Desp:

$$[[e, 2], 2] = [e, 2] - \frac{1}{2} = e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = e - 1$$

También resolviendo mediante cálculo directo:

$$(\epsilon^* E) = E + r_1 L_1 + r_2 L_2$$

$$0 = \epsilon^* E \cdot L_1 = 1 - 2r_1 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$$

$$0 = \epsilon^* E \cdot L_2 = 1 - 2r_2$$

Entonces:

$$(\epsilon^* E)^2 = E^2 + r_1^2 L_1^2 + r_2^2 L_2^2 + 2(r_1 E L_1 + r_2 E L_2 + r_1 r_2 L_1 L_2)$$

$$= -e + \frac{1}{4}(-2) + \frac{1}{4}(-2) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -e + \frac{1}{4}(-4) + 2 = -e + 1 = -(e-1)$$

En la contracción se tiene la fracción continua:

$$\frac{m}{q} = [e-1, b_1, \dots, b_n]$$

Usando la fórmula del caso de singularidad cíclica se tiene:

$$r = \frac{m}{\text{mcd}(m, q+1)}$$

Ejempb.

$$\begin{array}{ccccccc} & & -2 \cdot L_2 & & & & \\ L_1 & & | & E_0 & E_1 & E_2 & \\ -2 & & -3 & -3 & -2 & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ -2 & -3 & -2 \end{array}$$

$$[2, 3, 2] = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{\frac{5}{2}} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$r = \frac{8}{(8, 6)} = \frac{8}{2(4, 3)} = 4 \Rightarrow r = 4$$

Calculamos discrepancias:

$$K_S = \pi^* K_X + c_1 L_1 + c_2 L_2 + d_0 E_0 + d_1 E_1 + d_2 E_2$$

$$K_S L_1 = 0 = -2c_1 + d_0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$K_S L_2 = 0 = -2c_2 + d_0$$

Encuentramos las discrepancias de los E_i :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ es el sistema}$$

Las discrepancias son:

$$\Delta_0 = -2 \Rightarrow d_0 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta_1 = 2(2) = 4 \Rightarrow d_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_2 = 2 \Rightarrow d_2 = \frac{1}{4}$$

$r=4$ sí es el índice buscado!

