

7 de Junio: Contracciones extremales explícitas I.

La charla de hoy abordaremos el MMP para log superficies y no enfocaremos en el caso de rayos extremales generados por C con $C^2 < 0$.

El objetivo es mostrar que dicho $C \cong \mathbb{P}^1$ y presentar ejemplos en los que surgen estas contracciones.

Bibliografía: [KK94]. J. Kollár, S. Kovács. *Birational Geometry of Log Surfaces*.

[KS88] J. Kollár, N.I. Shepherd-Barron. *Threefolds and Deformations of Surface Singularities*.

• Partimos con la definición del objeto central de nuestra charla. Pares logarítmicos o de forma más corta, log pair.

Definición: (X, B) es un log pair, si X es una variedad normal y $B = \sum b_i B_i$ un \mathbb{Q} -divisor tal que $b_i \in [0, 1] \forall i$.

Una log resolución es un morfismo biracional $f: Y \rightarrow X$ en donde

$B_Y = f_*^{-1} B + \sum E_i$ es un divisor SNC. (Los divisores primos de B_Y se intersectan transversalmente).

• Para $K_X + B$ \mathbb{Q} -Cartier, sabemos que existen únicos a_i tal que

$$K_Y + f_*^{-1} B \equiv f^*(K_X + B) + \sum_{i=1}^s a_i E_i \quad a_i \text{ discrepancias}$$

El par se llama:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Log canonical lc} \\ \text{Purely log terminal plt} \\ \text{Kawamata log klt} \end{array} \right\} \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} a_i \geq -1 \quad \forall i \\ a_i > -1 \quad \forall i \\ a_i > -1 \text{ y } b_i < 1 \quad \forall i, j \end{array} \right.$$

Ejemplos:

• $B=0$ y $f: Y \rightarrow X$ res de sing : (X, B) es log terminal $\Leftrightarrow X \cong \mathbb{C}^2/G$

donde $G \leq GL_2(\mathbb{C})$ con $|G| < \infty$.

• Motivación: Con $B \neq 0$ hay más flexibilidad para trabajar y podemos capturar geometría cuando el MMP del caso suave no lo hace.

Ejemplo: Sup suave con $K_Y \equiv 0$.

De \mathbb{F}_2 sabemos que se tiene

$$\begin{array}{c|c|c} & 2 & h \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline & -2 & \\ \hline F & F & \Delta_0 \end{array}$$

Como el divisor $4h$ ($\mathcal{O}(2)^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}(4)$) podemos simplificar un cubrimiento doble

$$Y = \text{Spec}_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)) = \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & B_2 \\ \hline -2 & -2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2:1} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 0 & 0 \\ \hline -2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Notamos que } K_Y &= \pi^* \left(K_{\mathbb{F}_2} + \frac{4h}{2} \right) \text{ y } K_{\mathbb{F}_2} = -2\Delta_0 - 4F. \\ &= 0. \end{aligned} \quad h = \Delta_0 + 2F.$$

Si tomamos $B = d_1 D_1 + d_2 D_2$, $d_i \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Las únicas curvas negativas respecto a $K + B$ son

$$\text{Se sigue que } \overline{NE}(Y)_{K+B < 0} = \mathbb{R}^{\geq 0}[B_1] \oplus \mathbb{R}^{\geq 0}[B_2].$$

Las contracciones extremales $\text{cont}_{\mathbb{R}^{\geq 0}[B_i]} : Y \rightarrow Z$ dan sobre una

superficie normal, en donde $\left. \begin{array}{l} \\ B_i \end{array} \right\} \rightarrow \text{cono} \frac{1}{2}(1,1)$.

MMP log superficies:

(Teorema del cono log): Si $f: S' \rightarrow S$ es la resolución minimal

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(X)_{K_S+B \geq 0} + \sum_{\substack{C \text{ curva racional} \\ \text{en } S'}}^{\geq 0} \mathbb{R}[f(C)]$$

• Si C genera un rayo extremal, entonces pasa lo siguiente.

$C^2 > 0 \Rightarrow \rho(S) = 1$ y $-(K_S + B)$ es amplio. (Log-del Pezzo)

$C^2 = 0 \Rightarrow \exists h: S \rightarrow T$ con T curva t.q. $(h^* \rho \cong \mathbb{P}^1)$ genéricamente y S posee a lo sumo singularidades racionales).

$C^2 < 0$ Sucede de forma similar al blow-down, contraemos a una superficie y C debe ser una curva racional.

Teorema: Si (S, B) es log canonical t.q. $C^2 < 0$ y $C \cdot (K_S + B) < 0$,
 $\Rightarrow C \cong \mathbb{P}^1$ y se contrae a un punto $pt.$

Enunciamos un par de lemas clave para la demostración del resultado.

Lema 1: $C = \bigcup_{i=1}^s C_i$ tal que $(C_i \cdot C_j)$ es definida negativa.

Sean $\{a_i \mid 1 \leq i \leq s\} \subseteq \mathbb{Q}$ t.q. $a_i \geq -1$

$$\text{y } C_j \cdot K_X = C_j \cdot \sum_{i=1}^s a_i C_i \quad \forall j$$

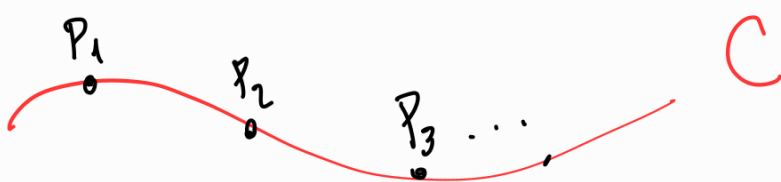
$\Rightarrow C$ se contrae a un log terminal pair.

Dem: [KK94] Teorema 2.3.1.

Lema 2: Si (X, B) es log canonical y $f: Y \rightarrow X$ minimal, entonces

$(R^1 f_* \mathcal{O}_Y)_x = 0$ a menos de que $x \notin \text{Supp}(B)$ y (X, B) singularidades elípticas o cuspidales.

Dem: [KK94] Corolario 2.2.11.

Dem: Teorema: 

Si $f: S' \rightarrow S$ la resolución de singularidades de los p_i sobre C .

Entonces tenemos números a_i tales que:

$$K_{S'} + f_*^{-1} B' \equiv f^*(K_S + B) + \sum_{i=1}^s a_i C_i$$
 donde los C_i son las curvas

excepcionales de los P_i . Definiendo $a_0 = \frac{C \cdot (K_X + B)}{e^2} < 0$ y usando

$(f_*^{-1} C)^2 < 0$ junto a $f_*^{-1} C \cdot K_{S'} < 0$, obtenemos la descripción

de $K_{S'}$:

$$K_{S'} \equiv f^* N + \sum_{i=0}^s a_i'' C_i$$
 en donde, $N = K_S + B - a_0 C$ con $a_i'' > -1$.

Comprobamos que $C_j \cdot K_{S'} = -C_j \cdot \left(\sum_{i=0}^s a_i'' C_i \right)$, entonces

por el Lema 1, $\exists g: S' \rightarrow T$ contracción de $\bigcup_{i=1}^r C_i$ a un punto ptb.

Por construcción, esto induce un morfismo $h: S \rightarrow T$ que contrae a C y es log terminal a lo largo de h^*B .

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{f} & S \\ g \searrow & & \swarrow h \\ & T & \end{array} \quad h(C) = \{x\}.$$

Por el Lema 2, puesto que S' es no singular, esto implica que $(R^1 g_* \mathcal{O}_{S'})_x = 0$. Por la sucesión espectral de Leray y el hecho de que $g_* \mathcal{O}_{S'} = h_* \mathcal{O}_S$, se sigue también que $(R^1 h_* \mathcal{O}_S)_x = 0$.

Luego, $(R^1 h_* \mathcal{O}_S)_x \cong R^1 h_* \mathcal{O}_S|_{h^{-1}(x)} \cong H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$. \square

* Estas contracciones divisoriales disminuyen en 1 el $\rho(X)$.

Por lo tanto, solo van a existir un número finito de pasos que

contraen estas curvas $f: S \rightarrow S_1 \rightarrow \dots \rightarrow S_n = S'$.

$(S', f_* B)$ es un par log terminal y satisface exactamente una de las siguientes condiciones.

- i) $K_{S'} + f_* B$ es nef
- ii) $\exists g: S' \rightarrow T$ morfismo tal que S' es birracionalmente regular sobre T .
- iii) $(S', f_* B)$ es log-del Pezzo.

* Ejemplos en la práctica, ¿a lo más 2 singularidades?

En lo que resta presentaremos ejemplos que ya hemos visto (Seminaro Nres) de contracciones extremales inducidas por curvas con $C^2 < 0$.

En dicha situación C tiene a lo más 2 singularidades.

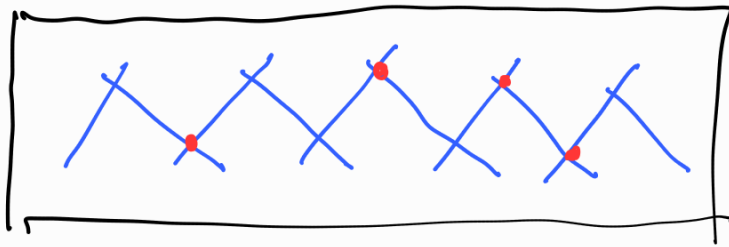
Def: Sean $0 < \Omega < \Delta$ con $\gcd(\Delta, \Omega) = 1$, $(Q \in Y)$ la singularidad cociente cíclico $\frac{1}{\Delta}(1, \Omega)$. Una P -resolución extremal de Q , es una resolución parcial $f_0^+: (C \subseteq X^+) \rightarrow Y$ de singularidades tal que

X^+ solo tiene singularidades de Wahl, $C^+ \cong \mathbb{P}^1$ y K_{X^+} es relativamente amplio.

En particular $K_{X^+} \cdot C^+ > 0$.

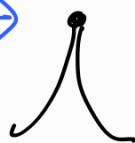
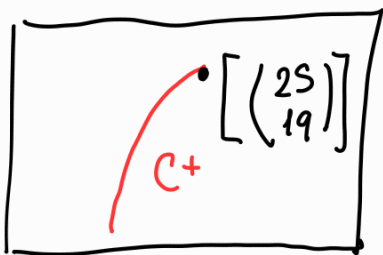
* Por las afirmaciones 3.13 y 3.14 del [KSB88], sabemos que a lo sumo hay dos singularidades sobre C^+ .

La resolución maximal pone restricciones sobre las posiciones donde surgen las singularidades en una P -resolución cualquiera.



Ejemplo P -resolución extremal.

$$\left[\begin{pmatrix} n \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right] := \frac{n^2}{n\varepsilon - 1}$$

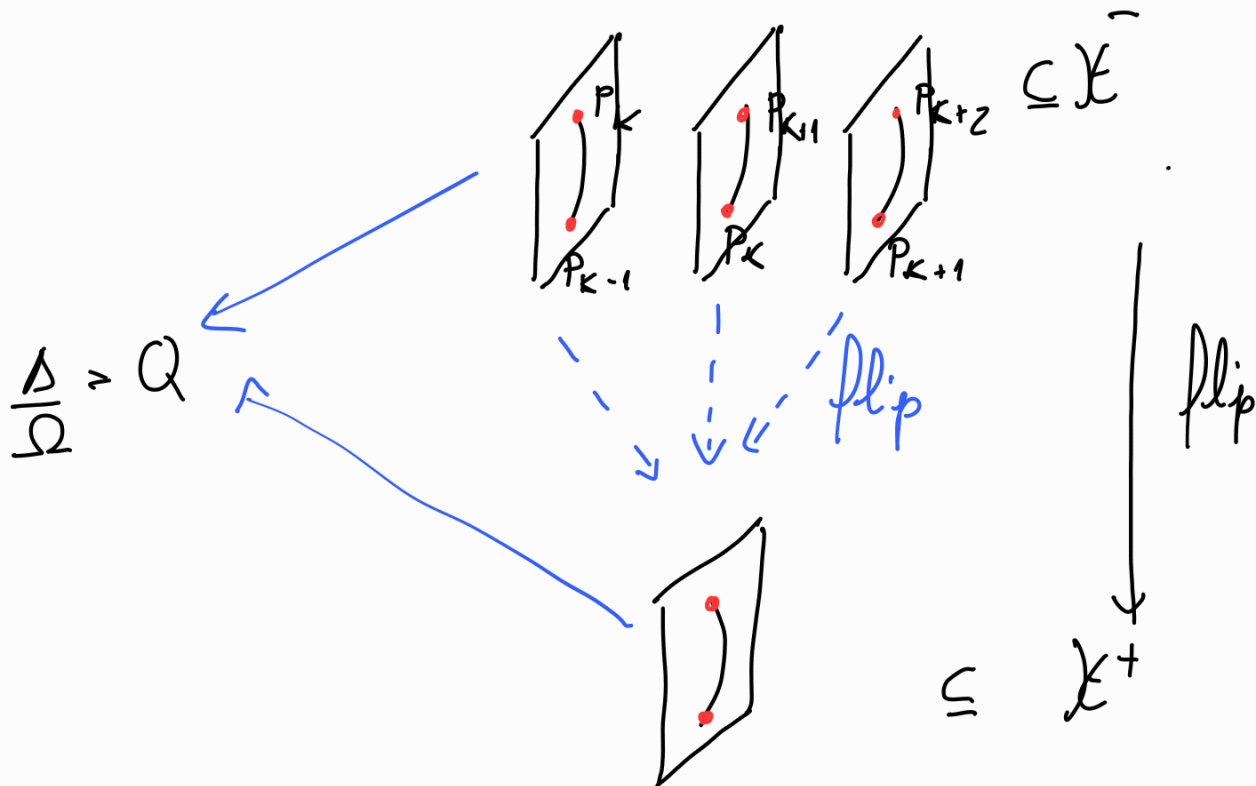


$$\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{476}{364}$$

$$(C^+)^2 = -\frac{476}{625} < 0$$

$$C^+ \cdot K_{X^+} = \frac{6}{25}$$

* Se sabe que una P -resolución admite a lo sumo dos familias universales de antiflip. Cada representante W de una familia posee una curva C^- bñ $C^- \cdot K_X < 0$ y pasa por a lo sumo dos singularidades de Wahl. C^- se contrae al mismo Q .



Ejemplo: Markov $a=2$

$$\left[\begin{pmatrix} 25 \\ 19 \end{pmatrix} \right] - (C_1) - \left[\begin{pmatrix} 149 \\ 113 \end{pmatrix} \right] - (C_2) - \left[\begin{pmatrix} 869 \\ 659 \end{pmatrix} \right] - (C_3) - \left[\begin{pmatrix} 5065 \\ 3841 \end{pmatrix} \right] - \dots$$

da una familia de vecindades extremales que contrae a la sing $\frac{\Delta}{\Omega} = \frac{476}{364}$.

Note: Cuando lleguemos al MMP de 3-folds, se establecerá el flip.