

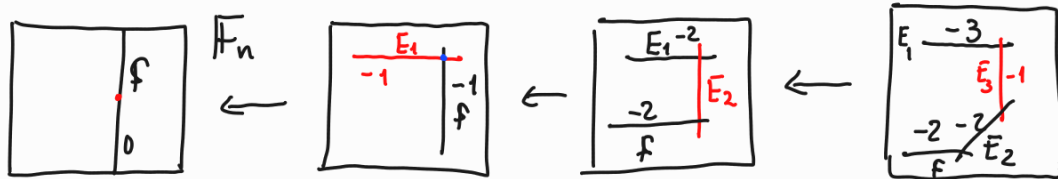
# Contracciones extremales explícitas III.

Estudiamos la parte final del paper "Birational Geometry of Log Surfaces" [KK94] que consiste en entender las singularidades del modelo minimal cuando partimos con  $(X, B)$  suave.

Sabiendo que  $B = \sum_{i=1}^r b_i B_i$  con  $b_i \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , ¿Cómo los  $b_i$  determinan las singularidades

del MMP?

Ejemplo:



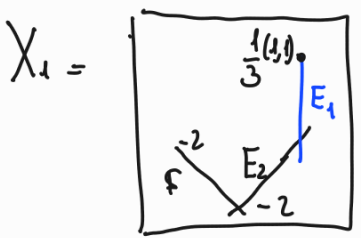
Con  $X = \begin{array}{|c|} \hline E_1 \text{ --- } -3 \\ \hline \text{--- } E_2 \\ \hline \end{array}$   $B = b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 f$ .

•  $E_1$  genera un rayo extremal cuando  $(K_X + B) \cdot E_1 < 0$

$(K_X + B) \cdot E_1 = 1 + B \cdot E_1 = 1 - 3b_1 < 0 \Leftrightarrow b_1 > \frac{1}{3}$ . Si fijamos  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,

entonces podemos contraer  $E_1$ :

$f: X \rightarrow X_1$ ,  $B_1 = (f_*)_*(B) = b_2 E_2 + b_3 f$ .

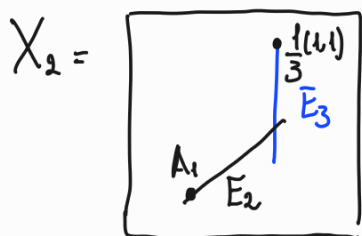


•  $f$  se contrae se contrae cuando  $f \cdot (K_{X_1} + B_1) < 0$ .

$f \cdot (K_{X_1} + B_1) = 0 + f \cdot B_1 = b_2 - 2b_3 < 0$ .

Si fijamos  $b_3 = \frac{1}{3}$ , entonces  $b_2 < \frac{2}{3}$  para que contraiga:

$$f_1: X_1 \rightarrow X_2$$



$$B_2 = (f_1)_*(B) = b_2 E_2$$

• Para contrar E<sub>3</sub> debemos tener  $E_3^2 < 0$  y  $(K_{X_2} + B_2) \cdot E_3 < 0$ .

En su resolución minimal, si hacemos  $g = f_1 \circ f_0$

$$E_3^2 = g^* E_3 \cdot g^* E_3 = \hat{E}_3 (\hat{E}_3 - a_1 E_1) = -1 - a_1$$

$$0 = E_1 \cdot g^* E_3 = E_1 \cdot (\hat{E}_3 - a_1 E_1) = 1 + 3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow E_3^2 = -\frac{2}{3}$$

Con respecto al canónico:

$$\begin{aligned} \bullet (K_{X_2} + B_2) \cdot E_3 &= g^*(K_{X_2} + B_2) \cdot g^* E_3 = (K_X + g_x^{-1} B_2 - d_1 E_1 - d_2 f) \cdot \hat{E}_3 \\ &= (K_X + b_2 E_2 - d_1 E_1 - d_2 f) \cdot \hat{E}_3 \end{aligned}$$

Observamos que la discrepancia del E<sub>1</sub> nos da:

$$0 = E_1 \cdot g^*(K_{X_2} + B_2) = E_1 \cdot (K_{X_2} + b_2 E_2 - d_1 E_1 - d_2 f) = -1 + 3d_1$$

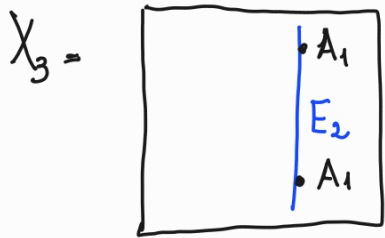
$$\Rightarrow d_1 = -\frac{1}{3}$$

Por consiguiente:

$$(K_{X_2} + B_2) \cdot E_3 = (K_X + b_2 E_2 + \frac{1}{3} E_1 - d_2 f) \cdot E_3 = -1 + b_2 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + b_2 < 0.$$

Si asignamos por ejemplo  $b_2 = \frac{1}{2}$  podemos contrar E<sub>3</sub>.

$$f_2: X_2 \rightarrow X_3, \quad B_3 = (f_2)_*(B_2) = 0.$$



$E_2$  termina siendo una curva con autointersección 0 y negativa respecto a  $K_{X_3}$ . Así obtenemos que  $X_3$  es reglada singular y es un modelo minimal para  $X$ .

En resumen: Para  $(X, \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 + \frac{1}{3}E_3)$  encontramos un modelo minimal  $X_3$  y

observamos que dichos coeficientes de  $B$  determinan si las contracciones existen o no.

Más aún: las singularidades del MMP están controladas por los  $b_i$ .

Recordemos que las discrepancias se calculan de la siguiente manera:

Si  $X$  es superficie suave y  $f: X \rightarrow T$  es un morfismo biracional hacia  $T$  normal con

$$Exc(f) = \bigcup_{i=1}^s C_i$$

$$\text{Entonces } \exists! \{d_j\}_{j=1}^s \text{ tales que: } C_j \cdot K_X = C_j \cdot \left( \sum_{i=1}^s d_i C_i \right).$$

**Prop:** Si  $(X, B = \sum b_i B_i)$  es una log superficie suave y  $\bigcup_{i=1}^s C_i$  son las curvas contraídas por el MMP, entonces  $b_j > -d_j$ .

Con este resultado deducimos fácilmente lo siguiente:

**Prop:** Si  $(X, B = \sum b_i B_i)$  es log superficie suave y  $b_i \leq \frac{1}{3} \forall i \Rightarrow$  el modelo minimal de  $(X, B)$  tiene solamente singularidades ADE.

Dem: Si  $(X', B')$  es el modelo minimal y contiene una singularidad NO ADE

$\Rightarrow$  Luego  $f: X \rightarrow X'$  contrae una curva  $C_j$  con  $C_j^2 < -2$ .

$$\text{Entonces } d_j C_j^2 \geq d_j C_j^2 + \sum_{i \neq j} d_i (C_j \cdot C_i) = K_X \cdot C_j \geq -2 - C_j^2$$

$$\Rightarrow d_j \leq -1 - \frac{2}{C_j^2} \leq -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, si  $C_j$  hace parte de  $B \Rightarrow \frac{1}{3} \leq -d_j < b_j$  □

Dado que al ejecutar el MMP termina en un par  $(X, B)$  log-terminal sabemos que todas sus singularidades son corrientes. De hecho, los  $b_i$  determinan todas las posibilidades para singularidad.

Sea  $(X, B' + B'')$  log superficie suave con  $B' = \sum_{i=1}^{r'} b_i' B_i'$  con  $b_i' \leq \frac{1}{4}$  y  $B'' = \sum_{i=1}^{r''} b_i'' B_i''$  el resto.

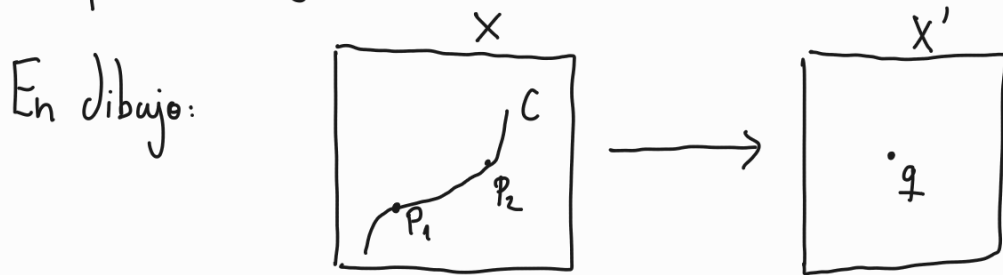
Prop: (Lema 2.5.7 [KK94])

Si existe  $\epsilon > 0$  tq  $b_i'' \leq 1 - \epsilon \forall i$ , entonces las singularidades del modelo minimal hacen parte de una lista finita. Más aún, el índice del modelo minimal divide a  $L\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^{r''}$ .

- Si  $X'$  es el modelo minimal y  $f: S' \rightarrow X'$  su resolución minimal, entonces  $f$  contrae a lo sumo  $2r''$  curvas y si  $C$  es contraída por  $f$ ,  $C^2 \geq -\frac{2}{\epsilon}$ .

• Singularidades sobre curvas excepcionales: ( $C^2 < 0$  y  $K_X \cdot C < 0$ )

En la primera charla establecimos que: Si  $(X, B)$  es un par l.c. y  $C \subseteq X$  es curva tal que  $C^2 < 0$  y  $(K_X + B) \cdot C < 0 \Rightarrow (X, B)$  converge a  $(T, B')$  l.t.



Fijándonos en  $B=0$  y asumiendo que  $(X, 0)$  es l.t., podemos deducir varios aspectos de  $C$ :

- # De singularidades que pueden estar sobre  $C$ .
  - El tipo de las singularidades  $P_i$ .
  - El tipo de singularidad de  $q$ .
  - La intersección de  $f_*^{-1}C$  con las curvas excepcionales de los  $P_i$ .
- El primer paso para responder estas preguntas es calcular la autointersección de  $C$  en su resolución minimal.

Sea  $f: X' \rightarrow X$  la res. minimal de  $X$ , si  $\hat{C}$  es la transformada estricta de  $C$  observamos que si  $\text{Exc}(f) = \bigcup_{i=1}^s E_i$

$$\Rightarrow C^2 = (f^*(C))^2 = \hat{C} \cdot (\hat{C} - \sum_{i=1}^s a_i E_i) < 0 \quad , \text{ en donde}$$

$$0 = E_i \cdot f^*(C) = \hat{C} \cdot E_i - E_i \cdot \left( \sum_{j=1}^s a_j E_j \right)$$

$$\Rightarrow \hat{C} \cdot E_i = \sum_{j=1}^s a_j (E_i \cdot E_j) \quad .$$

Dado que  $M = (E_i \cdot E_j)$  es negativa definida, notamos que:

$$a^T M a = a^T \begin{pmatrix} \hat{C} \cdot E_1 \\ \vdots \\ \hat{C} \cdot E_s \end{pmatrix} = \hat{C} \cdot \left( \sum_{i=1}^s a_i E_i \right) < 0$$

Por consiguiente:  $C^2 = \hat{C}^2 - \hat{C} \cdot \left( \sum_{i=1}^s a_i E_i \right) < 0 \Rightarrow \boxed{(\hat{C})^2 < 0}$ .

• Similarmente calculamos la intersección con el canónico:

$$K_X \cdot C = f^*(K_X) \cdot \hat{C} = \hat{C} \cdot K_{X'} - \hat{C} \cdot \left( \sum_{i=1}^s d_i E_i \right) < 0. \text{ Puesto que a priori sabemos que}$$

$$-1 < d_i < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^s d_i (E_i \cdot C) < 0 \text{ y por tanto: } \hat{C} \cdot K_{X'} < 0.$$

Por adjunción sabemos que  $\boxed{(\hat{C})^2 = K_{X'} \cdot \hat{C} = -1}$ .

• El hecho de que  $(\hat{C})^2 = -1$  impone restricciones sobre el número de singularidades que pasan sobre  $C$ .

Para esto usamos la propiedad universal de la resolución minimal, si  $T \xrightarrow{h} (q \in T)$  es la resolución minimal de  $T$  y  $g: X \rightarrow T$  sabemos que  $\exists \varphi: X' \rightarrow T'$  biracional

$$C \mapsto q$$

tal que:  $h \circ \varphi = g \circ f$

Puesto que  $\varphi$  es un morfismo biracional entre superficies suaves  $\Rightarrow \varphi = E_n \circ \dots \circ E_1 \circ u$  donde  $u$  es un isomorfismo y  $E_i$  blow-downs.

Dado que  $E_{X,C}(h)$  no posee curvas  $-1$ , entonces  $\varphi$  consiste de hacer blow-downs hasta eliminar todos los curvas  $(-1)$ . Como  $\hat{C}$  es la única curva  $(-1)$  en  $E_{X,C}(g \circ f)$ , partimos contrayéndola.

• Como pequeña observación: Notamos que si  $P$  es un punto singular en  $X$  y  $C_1, \dots, C_k$  son las curvas que generan su grafo en  $X'$ , entonces  $C_i \cdot \hat{C} > 0$  para a lo sumo en  $i$  y  $C_i \cdot \hat{C} = 1$ .

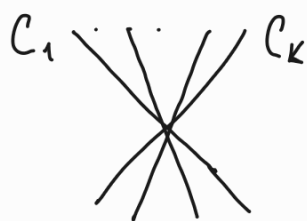
Si la intersección  $C_i \cdot \hat{C} > 0$ , entonces  $m_P(\mathcal{V}_X(C_i)) \geq 2$  porque  $\mathcal{V}$  no contiene curvas singulares  $\rightarrow \leftarrow$ . Así mismo, para preservar la definitividad negativa de  $\begin{pmatrix} (C_i \cdot C_j) & \mathcal{V} \\ \mathcal{V} & -1 \end{pmatrix}$

donde  $\mathcal{V} = (\hat{C} \cdot C_1, \dots, \hat{C} \cdot C_n)$  se sigue que  $\mathcal{V} = e_l$  para algún  $l$ .

• Notamos que  $\# \text{sing} \leq 2$ .

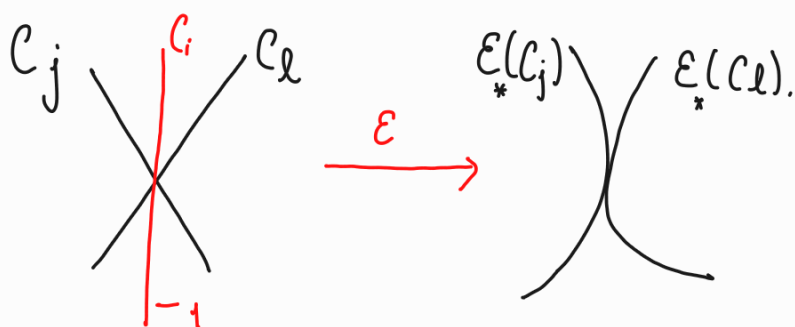
Sean  $P_1, \dots, P_k$  las singularidades que están sobre  $C$  y  $C_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) curvas excepcionales sobre  $P_i$  de  $C_i \cdot \hat{C} = 1$ .

En el caso de que  $C_i^2 \leq -3 \forall i$ , notamos que al contraer  $\hat{C}$  se obtiene:



Lo cual es contradictorio para  $k > 2$  porque  $\mathcal{V}$  no contiene más curvas y el grafo de  $T'$  no posee dicha configuración.

En caso de tener  $k \geq 3$  y  $C_i^2 = -2$ , llegamos a:

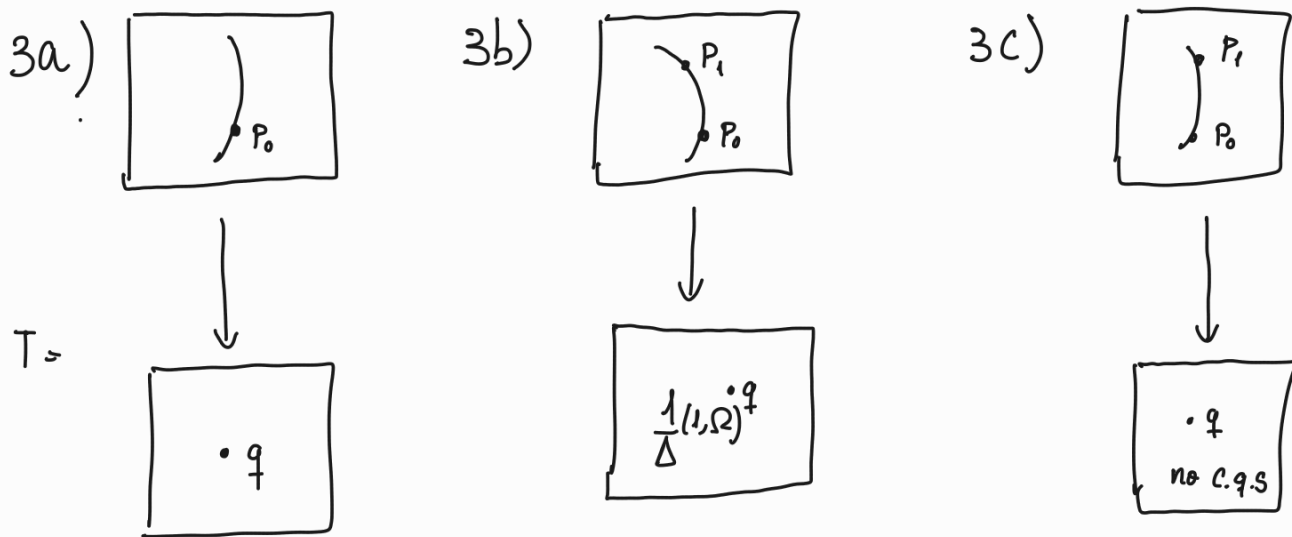


$$\begin{aligned} \text{Dado que } E_x(C_j) \cdot E_x(C_l) &= E^*(E_x(C_j)) \cdot E^*(E_x(C_l)) \\ &= C_j \cdot (C_l + E) = 2 \end{aligned}$$

Esto es una contradicción porque esta intersección se mantiene al cambiar el resto de  $-1$  y sabemos que  $E_x(h)$  solo posee intersecciones transversales.

Llegamos a las tres situaciones descritas por Kawamata en: "Crepant Blowing up of 3-dimensional Canonical Singularities and its Applications to Degenerations of Surfaces".

$X =$



Aquí suponemos que  $P_0$  y  $P_1$  tienen índice  $> 1$ . El caso ADE corresponde a puntos suaves y por tanto no lo incluimos.

La **Proposición 10.9** establece que  $P_0$  y  $P_1$  deben ser singularidades cociente cíclicas. Mediante la técnica de linealización del grupo  $G$  en donde  $(X, P_i) \cong (\mathbb{C}^2/G, 0)$  y el cubrimiento canónico de  $X$ , Kawamata demuestra que  $G \cong C_{m,n}$ . (Siguiendo la notación de la Tabla 10.10 del paper).

En la demostración del Teorema 10.6, Kawamata demuestra que 3c) no es posible.





Sabemos que en el caso de que alguna sea  $-1$  nos da la tangencia  $X$  ( $\rightarrow\leftarrow$ )

Similantemente, si todos tienen autointersección  $< -1$  contradice que tengamos el grafo de una sing lb.

Por lo tanto si  $P_0 = \frac{1}{n_0}(1, m_0)$  con  $\frac{n_0}{m_0} = [b_1, \dots, b_r]$

$P_1 = \frac{1}{n_1}(1, m_1)$  con  $\frac{n_1}{m_1} = [e_1, \dots, e_s]$

La resolución minimal de  $X$  debe tener grafo  $[b_1, \dots, b_r] - (1) - [e_1, \dots, e_s]$ .