Geometría Birracional de Curvas y Superficies

I. Generalidades

$\mathbb{A}^n := k^n$ } Los cerrados son { $k[x_1, \dots, x_n]$

$\mathbb{P}^n := k^n \setminus 0/\sim$ } ceros de polinomios { homogéneos de $k[x_0, \dots, x_n]$

Nota. $x \sim y \iff (\exists \lambda \in k^*)(y = \lambda x)$

La topología con estos cerrados se llama topología de Zariski.

Asumimos que $k = \overline{k}$.

Definición. (Conjunto Irreducible)

X espacio topológico, $Y \subseteq X$.

$Y \subseteq C_1 \cup C_2$ con C_1, C_2 cerrados $\Rightarrow Y \subseteq C_1$ ó $Y \subseteq C_2$

Entonces Y es conjunto irreducible.

Definición.

Cerrados irreducibles de $\begin{cases} \mathbb{A}^n, \text{ variedades afines} \\ \mathbb{P}^n, \text{ variedades proyectivas} \end{cases}$

Abierto de una variedad: quasi variedad.

Una variedad es cualquier (quasi) variedad afín/proyectiva.

Ejemplo: $\underset{\substack{\text{q.v.a.} \\ \text{q.v.p.}}}{\mathbb{A} \setminus \{0\}} \subseteq \underset{\substack{\text{q.p.} \\ \text{v.a.}}}{\mathbb{A}} \subseteq \underset{\text{v.p.}}{\mathbb{P}}$

Definición. (Funciones Racionales)

Sea V una variedad.

$$k(V) = \left\{ \varphi : U \to k \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists U \subseteq V \text{ abierto, tal que } \varphi = f/g \text{ para } f, g \\ \text{polinomios en coordenadas globales del } V \end{array} \right\}$$

Definición (Funciones Regulares)

V variedad, $\varphi : V \longrightarrow k$ es función regular si para todo $p \in V$ existe entorno $U \subseteq V$ del p tal que $\varphi|_U \in k(\overline{V})$.

El anillo de funciones regulares en U se denota por $\mathcal{O}_V(U)$.

$\mathcal{O}_V$ es el haz estructural de V.

Ejemplo. $V := \{[x:y:z:w] \mid xy = zw\} \subseteq \mathbb{P}^3$

$V \supseteq U = (V \cap \{x \neq 0\}) \cup (V \cap \{z \neq 0\})$

$$\varphi : U \longrightarrow k$$
$$[x:y:z:w] \longmapsto \begin{cases} w/x, & x \neq 0 \\ y/z, & z \neq 0 \end{cases}$$ es función regular

Definición. (Morfismo de Variedades)

$\varphi : V' \to V$ continua tq $\forall U \subseteq V$ abierto:

$$\varphi_U^* : \mathcal{O}_V(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{V'}(U') \quad \text{con } U' = \varphi^{-1}(U)$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi|_{U'}$$

es homomorfismo de anillos.

En tal caso φ es llamado morfismo de variedades.

Si φ posee un morfismo inverso se dice que V es isomorfo a V' y se denota por $V \simeq V'$.

Definición. (Mapa Racional)

$\varphi : U \subseteq V \longrightarrow V'$, U abierto de V, es mapa racional si:

- $\varphi : U \to V'$ es morfismo.
- φ no se puede extender a un abierto más grande.

En tal caso φ se dice mapa racional de V en V' y se denota por $\varphi : V \dashrightarrow V'$.

Si φ posee un mapa racional inverso se dice que V es birracional a V' y se denota por $V \simeq_{bir} V'$.

Proposición. $V \simeq_{bir} V' \iff k(V) \simeq k(V')$.

Ejemplo. $V = \{y^2 z = x^3\} \subseteq \mathbb{P}^2$

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} V \setminus \{[0:0:1]\} \quad \text{es isomorfismo}$$
$$t \longmapsto [t:1:t^3] \quad \text{Entonces } V \simeq_{bir} \mathbb{P}^1.$$

Si $V \simeq_{bir} \mathbb{P}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, V se dice racional.

Definición. (Resolución de Singularidades)

$\varphi : V' \dashrightarrow V$ es resolución de singularidades de V si V' es no singular.

Teorema. (Hironaka, 1964)

$\operatorname{char} k = 0 \Rightarrow$ Toda variedad tiene resolución de singularidades.

Definición. (Blow Up de un punto)

$$Bl_p(\mathbb{P}^n) = \{ (x,y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x_i y_j = x_j y_i \ ; \ i,j = \overline{0,n-1} \}$$

donde $p = [0:0:\dots:0:1]$.

Junto con la aplicación:

$$\begin{aligned} \epsilon : Bl_p(\mathbb{A}^n) &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad, entonces se define:

$$Bl_p(V) := \epsilon^{-1}(V)$$

La trasformada estricta de V denotada por $\hat{V}$ es:

$$\hat{V} := \overline{\epsilon^{-1}(V \setminus \{p\})}$$

El divisor excepcional es $E = \epsilon^{-1}(p) = p \times \mathbb{P}^{n-1}$

Proposición. $Bl_p(V) \simeq_{bir} V$

El blow up se utiliza para encontrar el modelo no singular de una variedad.

Ejemplo. $V = \{ y^2 = x^2(x+1) \} \subseteq \mathbb{A}^2$ tiene singularidad en 0.

Entonces

$$Bl_p(V) \subseteq V \times \mathbb{P}^1 \quad \text{donde} \quad vx = uy$$

Se tiene entonces que si $u = 1$, $y = vx$ entonces

$$v^2 x^2 = x^2(x+1) \Rightarrow x^2 = 0 \ \text{ó} \ v^2 = x+1$$

Entonces vemos que $\{ v^2 = x+1 \} \simeq_{bir} V$ y es no singular.

Queremos clasificar las variedades con la siguiente estrategia:

1. Clasificar $\simeq_{bir}$
2. En $\simeq_{bir}$ hallar mod. no sing.
3. Clasificar los mod. no sing.
4. Comparar var. con mod.

II. Curvas

Teorema. Toda curva proyectiva tiene una única resolución de singularidades.

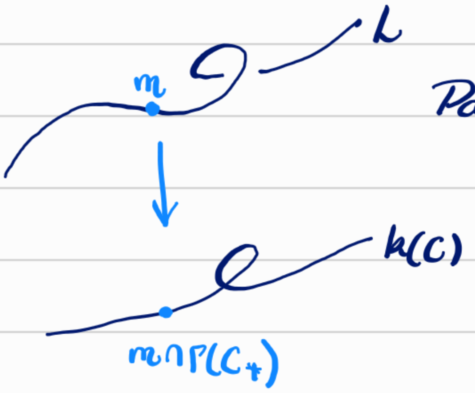
Para demostrar esto necesitaremos primero mostrar el teorema:

Proposición. Sea C curva proyectiva, $L \supseteq k(C)$, $R \subseteq L$ un DVR tq $R \not\supseteq k(C)$ entonces existe un único $p \in C$ tal que R domina $\mathcal{O}_{C,p}$.

Demostración.

Unicidad. Si R domina $\mathcal{O}_{C,p}$, $\mathcal{O}_{C,q}$ y $p \neq q$ entonces existe un polinomio f tal que $f(p)=0$, $f(q) \neq 0$.
ie. $f \in m_p$, $f \notin m_q$ entonces se sigue respectivamente $\operatorname{ord}(f) > 0$, $\operatorname{ord}(f) \leq 0$ pues R domina $\mathcal{O}_{C,p}$, $\mathcal{O}_{C,q}$.
Por tanto necesariamente $p = q$.

Existencia. Pensamos L como una curva proyectiva.
R como abierto afín de L.



Paso 1. Hallemos el abierto de C que se corresponde al abierto R.
Suponer que $C_* = C \cap U_n$ es el abierto, sin pérdida de generalidad. $U_n = \{x_n \neq 0\}$
ie. $\Gamma(C_*) \subseteq R$

Paso 2. Mostramos que si $m \subseteq R$ es su ideal maximal entonces $m \cap \Gamma(C_*)$ es ideal maximal.
Si no lo fuese entonces $m \cap \Gamma(C_*) = 0$ luego esto implica que $k(C) \subseteq R$ pues $x_n \in R$ ó $x_n^{-1} \in R$ y todos los elementos de $\Gamma(C_*)$ se generan por x_j/x_n y son unidades por la suposición $m \cap \Gamma(C_*)$.
Por tanto $m \cap \Gamma(C_*)$ se corresponde con algún $p \in C$.
que R domina $\mathcal{O}_{C,p}$ ▨

Proposición. $C' \overset{\varphi}{\dashrightarrow} C$, el dominio de φ incluye todos los puntos no singulares del C'.

Demostración.

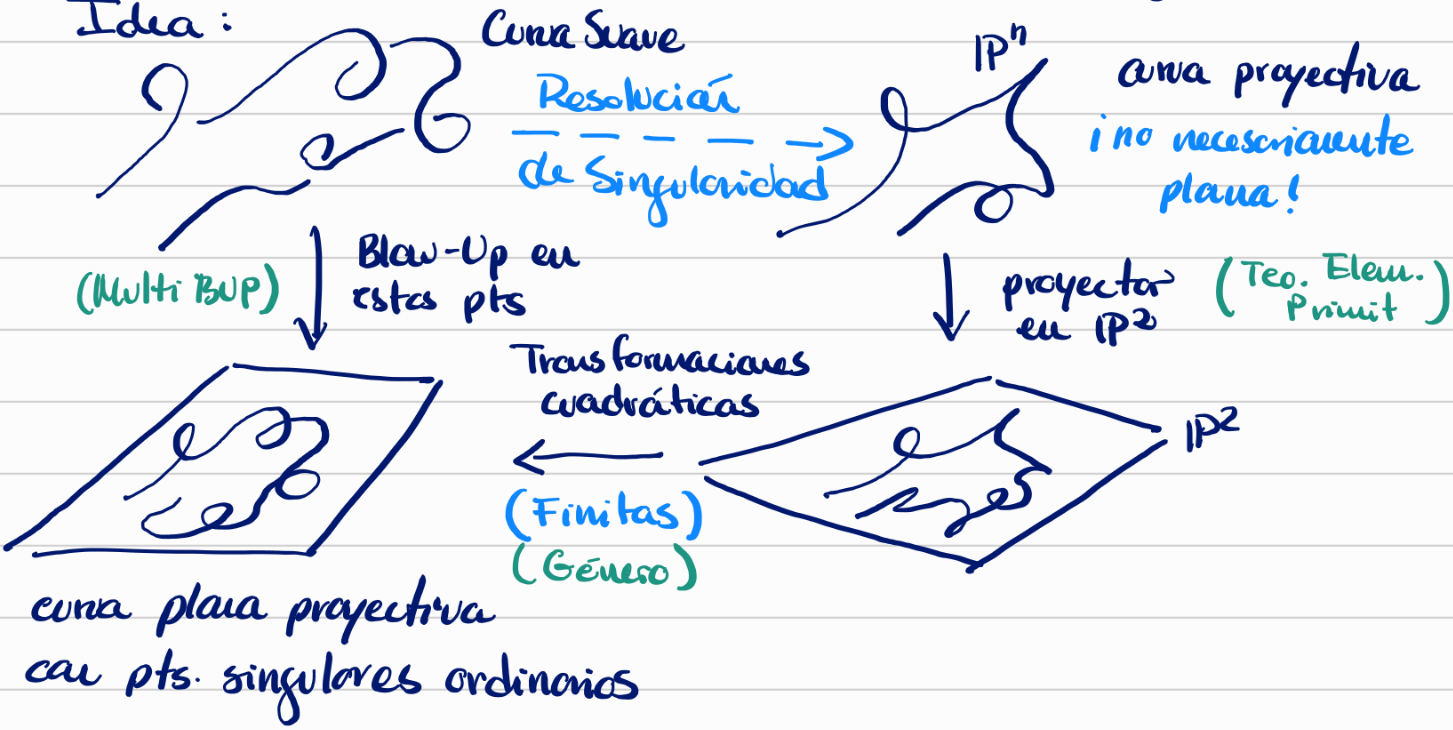
1. Si φ no es dominante entonces es constante.
2. $C' \overset{\varphi}{\dashrightarrow} C$ dominante $\Rightarrow k(C) \xhookrightarrow{\varphi^*} k(C')$ es inyección.
3. Si $p \in C'$ no singular y $\mathcal{O}_{C',p} \not\supset k(C)$ entonces aplicamos la proposición anterior y se termina.

Sólo queda mostrar que si p no singular entonces $\mathcal{O}_{C',p} \not\supset k(C)$.
Si ocurre lo contrario $k(C) \subseteq \mathcal{O}_{C',p} \subseteq k(C')$ como $k(C), k(C')$ son extensiones de k finitas, también $\mathcal{O}_{C',p}$ tiene que serlo (⨳)

Corolario. Si C' es no singular, φ es morfismo.
Corolario. Si $C' \simeq_{bir} C$ ambos no singulares, $C \simeq C'$.

Teorema. Toda curva proyectiva posee una resolución de singularidades.

Idea:



Teorema. Toda curva proyectiva es birracional a una curva plana.

Demostración.

1. C es curva proyectiva entonces $k(C)$ es el cuerpo de fracciones de algún $\frac{k[x_0,\dots,x_n]}{I}$ donde $\operatorname{trdeg} k(C) = 1$.

2. Consideramos los morfismos

$$\varphi_\alpha : C \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \qquad \text{para } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$$
$$[x_0 : \dots : x_n] \longmapsto [x_0 : \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i : x_n] \qquad \text{con } \alpha_i \in k.$$

Queremos afirmar que existe un α tal que φ_α es morfismo birracional sobre su imagen. Algebraicamente queremos:

$$k(x_0, \sum \alpha_i x_i, x_n) \simeq k(C) \quad \text{para algún } \alpha.$$

Esto es una consecuencia del teorema del elemento primitivo.

(Teorema del Elemento Primitivo)

Si k es de característica nula, L una extensión algebraica finita de k. Entonces $L = k(z)$ para algún $z \in L$.

Tenemos que asegurar que $x_1, \dots, x_{n-1}$ son algebraicos sobre el cuerpo $k(x_0, \dots, x_n) =: k(C)$.

Esto sigue de que C está definida por al menos $n-1$ ecuaciones.

Usando inducción sobre n, se tiene el resultado:

Caso base $n=2$ es trivial.

Caso general, tenemos que suponer que C no tiene un abierto en $x_n = 0$. Entonces podemos tomar la curva proyectada con $x_n = 0$. Aplicamos resultado aquí y como $C \cap U_n$ son finitos puntos entonces x_n es necesariamente algebraico.

De allí se tiene el resultado.

Teorema. Toda curva plana es birracional a una curva plana con puntos singulares ordinarios y existe una cantidad finita de transformaciones cuadráticas entre ellas.

Definición. Punto singular ordinario de una curva plana.

Sea C una curva plana, $p \in C$ y tomemos un abierto U con coordenadas locales xy, tal que $p = (0,0)$.

Entonces C se describe localmente por un polinomio F.

Así: $F(x,y) = \sum F_k(x,y)$ con F_k forma de grado k.

Ver que $F_d(x,y) = \prod_i (a_i x + b_i y)^{e_i}$

Si $e_i = 1$ para cada uno de los i, decimos que P es un punto ordinario.

Definición. Trasformación de Veronese

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$
$$[x:y:z] \longmapsto [yz : xz : xy]$$

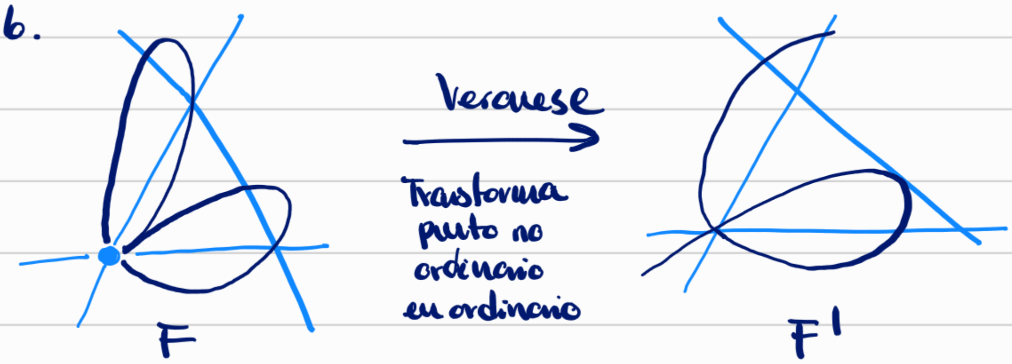
Notación. Puntos Fundamentales $[1:0:0], [0:1:0], [0:0:1]$

Líneas Excepcionales $x=0$, $y=0$, $z=0$

- Decimos que una curva está en buena posición si las líneas excepcionales no son tangentes a la curva en los puntos excepcionales
- Decimos que una curva está en excelente posición si esta en buena posición y además:
  - $z=0$ interseca la curva en su grado de veces.
  - $x=0$, $y=0$ intersecan la curva en su grado menos su multiplicidad en $x=y=0$ veces.

Proposición. Dada una curva plana C con punto P singular no ordinario existe un cambio de coordenadas tal que P se mapea al punto $x=y=0$ con C en excelente posición.

Ejemplo.



$$F = 8x^3y + 8x^3z + 4x^2yz - 10xy^3 - 10xy^2z - 3y^3z$$
$$F' = 8y^2z + 8y^3 + 4xy^2 - 10x^2z - 10x^2y - 3x^3$$

Las trasformaciones cuadráticas trasforman puntos singulares no ordinarios en puntos singulares ordinarios.

Blow Up en Varios Puntos

Sean $p_1, \ldots, p_t \in \mathbb{P}^2$ con $p_i = [a_{i1} : a_{i2} : 1]$, $U := \mathbb{P}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_t\}$

consideramos los morfismos
$$f_i : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$[x_1 : x_2 : x_3] \longmapsto [x_1 - a_{i1}x_3 : x_2 - a_{i2}x_3]$$

Notar que el gráfico de f_i en $U \times \mathbb{P}^1$ es el blow up en p_i.

Ahora consideramos:
$$f = (f_1, \ldots, f_n) : U \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1 \quad (t\text{-veces})$$

Si x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de $\mathbb{P}^2$

y_{i1}, y_{i2} son las coordenadas de la i-ésima copia de $\mathbb{P}^1$

Entonces
$$Bl_{p_1, \ldots, p_t}(\mathbb{P}^2) = cl\left(\left\{(x, y_1, \ldots, y_t) \in U \times \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1 \;\middle|\; y_{i1}(x_2 - a_{i2}x_3) - y_{i2}(x_1 - a_{i1}x_3),\ i = \overline{1,t}\right\}\right)$$

Afirmación. $Bl_{p_1, \ldots, p_t}(\mathbb{P}^2) \simeq_{bir} \mathbb{P}^2$

Tomando $C \subseteq \mathbb{P}^2$ se puede construir $Bl_{p_1, \ldots, p_t}(C)$ viendo sobre las restricciones de $f_i|_{U \cap C}$.

En general $Bl_{p_1, \ldots, p_t}(C) \simeq_{bir} C$.

Además si C posee sólamente puntos singulares ordinarios, el blow up en cada punto separa las tangentes distintas por lo cual $Bl_{p_1, \ldots, p_t}(C)$ es no singular.