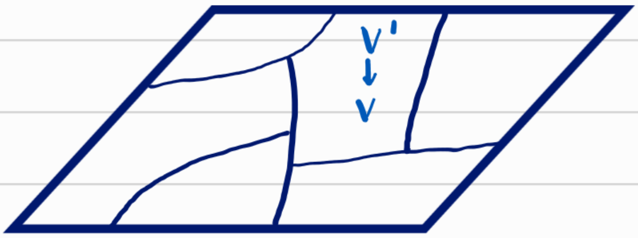
III. Superficies

Teorema:

$k = \overline{k}$, $\mathrm{Char}\, k = 0$ $\Rightarrow$ $\forall V$ variedad, $\exists V' \longrightarrow V$ resolución de singularidades.

Problema Abierto si $\mathrm{char}\, k = p$.

Recapitulación.



1. Clasificar $\simeq_{bir}$
2. Hallar Modelo No Sing.
3. Clasificar los mod. no sing.

En curvas:

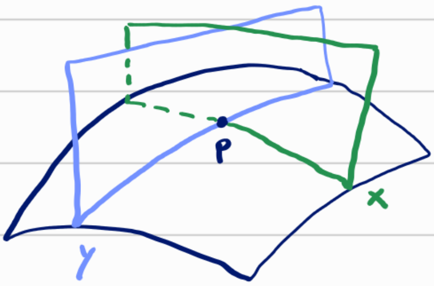
Existe un único modelo no singular.

En superficies: No siempre es único

Ejemplo: $\mathbb{P}^2 \simeq_{bir} Bl_p(\mathbb{P}^2)$ pero $\mathbb{P}^2 \not\simeq Bl_p(\mathbb{P}^2)$

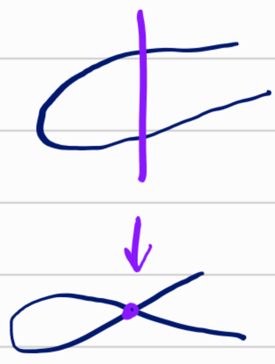
Definición. (Blow-Up para superficies no singulares)

- S no singular, x, y coord. loc. de $p \in U$.



$$\hat{U} = \{ xY - yX = 0 \} \subseteq U_{xy} \times \mathbb{P}^1_{XY}$$

$$\varepsilon : \hat{U} \longrightarrow U$$
$$(u,v) \longmapsto u$$



- $\hat{U} \setminus E \overset{\varepsilon}{\simeq} U \setminus \{p\} \Rightarrow S \simeq_{bir} \hat{U}$
- $\varepsilon^{-1}(p) = E \simeq \mathbb{P}^1$
- $\overline{\varepsilon^{-1}(S \setminus \{p\})}$ transf. estricta.

Definición. (Haz Estructural de una Variedad)

V variedad, $\mathcal{T}_V$ su topología, $U \in \mathcal{T}_V$.

$\mathcal{O}_V(U) := \{ f : U \longrightarrow k \mid f \text{ regular} \}$. $\mathcal{O}_V$ haz estructural

i) $\mathcal{T}_V$ es categoría.

ii) $\mathcal{O}_V$ funtor contrav. $\mathcal{T}_V$, Ring

iii) $f \in \mathcal{O}_V(\cup V_i)$, $f|_{V_i} = 0 \Rightarrow f = 0$

iv) $f \in \mathcal{O}_V(U)$, $g \in \mathcal{O}_V(W)$, $f|_{U\cap W} = g|_{U \cap W} \Rightarrow h \in \mathcal{O}_V(U \cup W)$
$h|_U = f$, $h|_W = g$

Def. Si el Funtor es de $\mathcal{T}_V$, Modulos
entonces es un haz de módulos.

Def Si $\mathcal{F}$ es haz de $\mathcal{O}_V$-módulos (ie $\mathcal{F}(U)$ es $\mathcal{O}_V(U)$ mod)
localmente de rango 1, se dice invertible.

Ejemplo: Haces Invertibles de $\mathbb{P}^1$: $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$
$\mathcal{O}(1)$ son las secciones generadas por $x, y \in k[x,y]$.

Def. Grupo de Picard.
Haces invertibles con operación $\otimes$.

Obs. $\mathcal{F}$ invertible $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_V) \cong \mathcal{F}^{-1}$.

Def (Divisores de V)

Divisor $= \sum n_i V_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, V_i subvar de cod 1.

$\operatorname{div} f = \sum_Z v_Z(f) Z$; $v_Z(f) := \min\{ k \mid f \in m_Z^k \}$ en $\mathcal{O}_{V,Z}$

Def (Class Group): $Cl(V) = \dfrac{Div(V)}{\sim}$; $A \sim B \Leftrightarrow A - B$ prin.

Ejemplo: $Pic(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$ C de grado d es equiv. dL
con L recta.

Definición. C, C' curvas irred. en S, superficie suave.

$$(C.C') = \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C \cap C') \, , \quad m_x(C\cap C') = \dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{(f,g)}$$

Proposición. $C \sim D$, $C' \sim D'$ entonces $(C.C') = (D.D')$

Razón: $(\mathcal{O}_S(C) . \mathcal{O}_S(C')) = (C.C')$ $\longrightarrow$ no depende del C, C' sino de la clase.

Teorema Si S es suave:

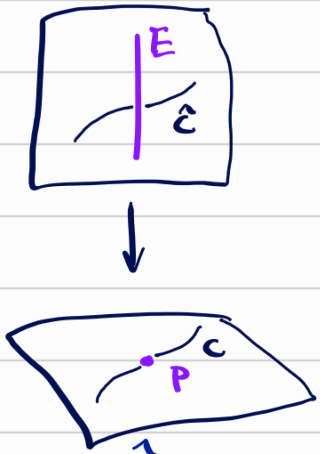
$$Cl(S) \simeq Pic(S)$$

Lema i) $\hat{S} \xrightarrow{\varepsilon} S$ entonces $\varepsilon^* C = \hat{C} + mE$ $\boxed{\text{Dibujar}}$

$\hookrightarrow$ la mult. de p en C

ii) D, D' divisores en $S \Rightarrow \varepsilon^* D . \varepsilon^* D' = D . D'$

$E . \varepsilon^* D = 0$, $E^2 = -1$



Tomar C de multiplicidad 1 (transversal)

$$\varepsilon^* C - E = \hat{C}$$

$$\underbrace{E . \varepsilon^* C}_{0} - \underbrace{E^2}_{-1} = \underbrace{E . \hat{C}}_{1}$$

Teorema. $\hat{S} \longrightarrow S$ blow-up, entonces $Pic \hat{S} \simeq Pic S \oplus \mathbb{Z}$

(Prop II.3)

Sketch of proof:

- Sobreyectividad sale de proyectar la transf. estricta.
- Sup. D en S con $\varepsilon^* D + nE = 0$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\varepsilon^* D . E}_{0} + n . \underbrace{E^2}_{-1} = 0 \quad \Rightarrow n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon^* D = 0 \overset{\text{proy}}{\Longrightarrow} D = 0$$

Ejemplo: $\mathbb{P}^2 \simeq_{bir} Bl_p(\mathbb{P}^2)$ pero $\mathbb{P}^2 \not\simeq Bl_p(\mathbb{P}^2)$

pues $Pic \, \mathbb{P}^2 = \mathbb{Z}$, $Pic \, Bl_p \mathbb{P}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Teorema. Sea $\phi : S \dashrightarrow S'$ un mapa racional de superficies. Entonces existe una superficie $\hat{S}$ y un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \hat{S} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3] & & S' \end{tikzcd}$$

donde las f, g son composiciones de blow-ups e isomorfismos.

Ejemplo. $\mathbb{P}^2 \overset{\phi}{\underset{\sim}{\dashrightarrow}} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mapa biracional.

$[x:y:z] \mapsto [x:z] \times [y:z]$

Paso 1: Hallar el locus de indeterminación

Obs. $x = z = 0$ ó $y = z = 0$

ie $[0:1:0]$ ó $[1:0:0]$

Paso 2: Mediante blow ups resolvemos la indeterminación

i) Blow Up en $[0:1:0]$

$[x:y:z] = [\frac{x}{y} : 1 : \frac{z}{y}]$ coordenadas locales

El blow up es:

$$\left\{ u\left(\frac{z}{y}\right) = v\left(\frac{x}{y}\right) \right\} \subseteq \mathbb{A}^2_{x/y,\, z/y} \times \mathbb{P}^1_{u,v}$$

Globalmente queda $\{ uz = vx \} \subseteq \mathbb{P}^2_{xyz} \times \mathbb{P}^1_{u,v}$

luego se tiene la coma

$[x:y:z] \times [u:v]$ con $uz = vx$ en $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$

$[x:y:z] \times [x:z]$

ii) Blow Up en $[1:0:0]$ (Estamos en abierto $x \neq 0$)

$[x:y:z] = [1 : \frac{y}{x} : \frac{z}{x}]$ coord. loc.

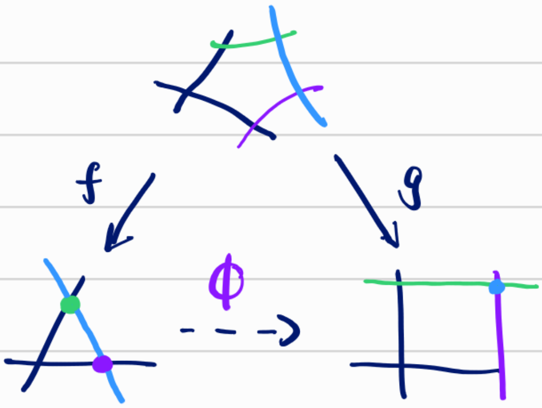
Blow up será:

$$\left\{ t\left(\frac{z}{x}\right) = s\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \subseteq \mathbb{A}^1_{y/x,\, z/x} \times \mathbb{P}^1_{s,t}$$

¡En este abierto se tiene lo mismo! Si vemos en la intersección de los abiertos tenemos coordenadas tipo: $[x:y:z] \times [x:z] \times [y:z]$

Sujeto a las condiciones: $\begin{cases} uz = vx \\ tz = sy \end{cases}$

Ahora el morfismo se extiende:



$$\begin{tikzcd} & Bl_{P_1,P_2}(\mathbb{P}^2) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed] & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Paso 3. Hallar locus de indeterminación de g^{-1}.

Observamos que:

$$[x:y:z]\times[u:v]\times[s:t] \xmapsto{g} [u:v]\times[s:t]$$

Primero veamos el locus de indet. del ϕ.

Calculamos ϕ^{-1}:

$$\phi([x:y:z]) = [x:z]\times[y:z]$$

$$\phi^{-1}([u:v]\times[s:t]) = \phi^{-1}\left(\left[\tfrac{u}{v}:1\right]\times\left[\tfrac{s}{t}:1\right]\right)$$

$$= \left[\tfrac{u}{v}:\tfrac{s}{t}:1\right] = [ut:sv:vt]$$

Entonces:

$$\phi^{-1}([u:v]\times[s:t]) = [ut:sv:vt]$$

Se indetermina cuando:

$$ut = sv = vt = 0$$

Si $v=0 \Rightarrow u\neq 0,\ t=0,\ s\neq 0$

Si $t=0 \Rightarrow s\neq 0,\ v=0,\ u\neq 0$

ie $[1:0]\times[1:0]$

Paso 4. Hacer blow up sobre este locus. La sup. resultante es isomorfa al anterior blow up.

Coordenadas locales para $[1:0]\times[1:0]$ son: $\left[\tfrac{u}{v}:1\right]\times\left[\tfrac{s}{t}:1\right]$

Entonces se tiene que:

$$\alpha\left(\tfrac{s}{t}\right) = \beta\left(\tfrac{u}{v}\right)$$ en el abierto

define el blow-up.

Proposición. (Eliminación de Indeterminación)

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\Phi"'] & & X \end{tikzcd}$$

- η una composición de finitos blow ups.
- f es un morfismo.

Sketch of proof.

1. Obs. locus de indeterminación es de codim 2 ie puntos, finitos.
2. Los pts. se asocian a un sistema lineal P.
3. Hacemos blow-up en un punto x de indeterminación, luego vemos el pullback $\epsilon^* P$ y le quitamos la multiplicidad del excepcional E en p ie $\epsilon^* p - mE$
4. El sistema $\epsilon^* p - mE$ define un morfismo racional $\varphi_1 : S' \dashrightarrow X$.
5. Repetimos proceso en S'.
6. $D_n = \epsilon^*_n D_{n-1} - k_n E_n \Rightarrow D_n^2 = D_{n-1}^2 - k_n^2 < D_{n-1}^2$ lo que garantiza que el algoritmo termina.

Proposición. (Prop. Universal del Blow Up)

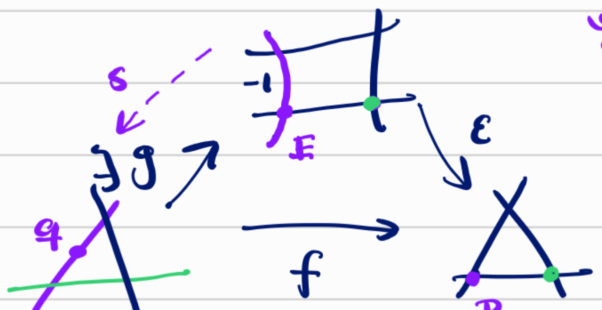
$$\begin{tikzcd} & \hat{S} \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ X \arrow[ur, "g", "\text{bir}"'] \arrow[rr, "f"', "\text{bir}"] & & S \end{tikzcd}$$

Sketch:

1. Si f^{-1} no def. en $p \in S \Rightarrow f^{-1}(p) = C$ curva
2. Esto se extiende aunque f no sea morfismo (pero si mapa bir)
3. Hacemos el mapa biracional $g = \varepsilon^{-1} \circ f$.
   Si hay un punto no def. de g tiene que ser el punto q tq $f(q) = p$ donde hacemos blow up.

Esto implica que $\delta^{-1}(q) = E$ es la excepcional.

y para cualquier q! $(\Leftarrow \times \Rightarrow)$



$P \to f^{-1}(p)$ es curva!

Teorema. $f: S \to S_0$ morfismo birracional

$\exists\, \varepsilon_k : S_k \to S_{k-1}$ $(k=\overline{1,n})$, $u : S \xrightarrow{\sim} S_n$

tq $f = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \circ u$

ie.

$$\begin{tikzcd}
 & S_n \arrow[d] \\
 & \vdots S_k \arrow[d] \\
 & S_1 \arrow[d] \\
S \arrow[uuur, "f"] \arrow[uur, dashed, "f_k"] \arrow[ur, dashed, "f_1"] \arrow[r] & S_0
\end{tikzcd}$$

Sketch: Ir quitando paso a paso los puntos donde se tiene fibras no triviales.

ie. Eliminar locus de indeterminación.

$$n(f_k) < n(f_{k-1})$$

$n(f_k) = \#$ curvas contraídas por f_k

ie. locus. indet. es finito

Teorema.

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{S} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
S \arrow[rr, dashed, "\Phi"'] & & S'
\end{tikzcd}$$

f, g comp. de blow ups e isomorfismos.

<u>Demo</u>

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{S} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\
S \arrow[rr, dashed, "\Phi"'] & & S'
\end{tikzcd}$$

eliminar la indeterminación

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{S} \arrow[d, "g"] \\
\tilde{S} \arrow[ur, "\alpha", "\sim"'] \arrow[r, "h"'] & S'
\end{tikzcd}$$

Elimino locus de indet. del h

Se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{S} \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \hat{S} \arrow[d, "g"] \\
S \arrow[r, dashed, "\Phi"'] & S'
\end{tikzcd}$$

de donde se tiene el resultado.

<u>Teo</u> (Criterio de Contractibilidad de Castelnuovo)

S una sup. $E \subset S$ curva $E \simeq \mathbb{P}^1$, $E^2 = -1$

$\Rightarrow$ E es una curva excepcional

ie. $\varepsilon : S \to \underset{\text{suave}}{S'}$ con E excep. del blow up.

Teorema. $\hat{S} \longrightarrow S$ blow-up, entonces $\mathrm{Pic}\,\hat{S} \simeq \mathrm{Pic}\, S \oplus \mathbb{Z}$

Observación. Hacer blow-down baja el rango del grupo de Picard.

$\Longrightarrow$ Estas son las llamadas sup. minimales.

Teorema. Si $S \xrightarrow[\text{bir}]{} S'$ ambas minimales $\Rightarrow S \simeq S'$

Observación: Hacer Blow Down baja el "número de Picard"

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[d, "\text{BLOW DOWN}"'] \arrow[rddd, "\text{Blow Up}"] & \\
S_2 \arrow[d] & \\
\vdots \arrow[d] & \\
S^n \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Sup. Minimal

¿Existe superficie minimal?

Sí porque el número de Picard no puede ser negativo y es siempre finito.

Se debe detener el proceso de blow-downs en finitos pasos.

¿Es única?

Depende $\begin{cases} \text{Superficies Regladas: No} \\ \text{Superficies No Regladas: Si} \end{cases}$