# Seminario Charla 4

En la charla pasada vimos que $X_0 \to \cdots \to X_m$ (minimal)

blow-downs

$$X_0 \xrightarrow{\text{blow-downs}} \cdots \to X_m \begin{cases} \longrightarrow K_X \text{ nef} & (\text{único}) \\ \searrow K_X \text{ no nef} & (\text{No único}). \end{cases}$$

Hoy con las técnicas de teoría de Mori, probaremos que $K_X$ no nef cae en $\to$ reglado
$\to X = \mathbb{P}^2$.

## 1. Equivalencia numérica:

• **Definición:**

En una superficie (Variedad) suave, $D$ y $D'$ divisores de Weil decimos que son numéricamente equivalentes si $\forall\, C$ curva $D \cdot C = D' \cdot C$. Se denota con $D \equiv D'$.

* **Ejemplo:**

- Si $D \sim D' \Rightarrow D \equiv D'$
- En $X$ superficie, si $f : X \to C$ con $f^*p \cong \mathbb{P}^1$ $\forall p$ se sigue que $F \equiv F'$ fibras. Si $g(C) \geq 1$, $F \not\sim F'$. Pero con $C \cong \mathbb{P}^1$, $p \sim p' \Rightarrow f^*p \sim f^*p'$.
- En $X$ superficie, $C \not\equiv 0$ porque $\forall\, H$ amplio $C \cdot H > 0$.

* De la sucesión exponencial $\left(0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0\right)$ recuerde que teníamos

$$\operatorname{Pic}^0(X) = \{ D \in \operatorname{Pic}(X) \mid D \equiv 0 \} \quad \text{y así} \quad NS(X) = \operatorname{Pic}(X) / \operatorname{Pic}^0(X) \subseteq H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Definimos $\boxed{N^1(X) = NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}}$

* Por otro lado:

**Definición (dim n):** Los 1-ciclos $\left(C = \sum n_i C_i \text{ con } C_i \text{ curvas}\right)$ se dicen numéricamente equivalentes, si $\forall\, D$ divisor de Cartier se tiene que $C \cdot D = C' \cdot D$.

(Para el caso dim $= 2$ sabemos que $N_1(X) = N^1(X)$, en general no).



Siempre tenemos $\langle\, , \rangle : N_1(X) \otimes N^1(X) \to \mathbb{R}$ no degenerado

Más aún, para $X$ cualquiera $\dim(N_1(X)) = \rho(X) < \infty$.

## 2. Cono de curvas

**Def:** El cono de curvas de $X$.

$$NE(X) = \left\{ \sum_i a_i [C_i] \;\middle|\; \begin{array}{c} C_i \text{ curvas} \\ a_i \geq 0 \end{array} \right\} \subseteq N_1(X).$$

$\overline{NE}(X)$ Cono cerrado de curvas (con respecto a la norma euclidiana)

$Nef(X) := \overline{NE(X)}^\vee \subseteq N^1(X)$ $\quad (K^\vee = \{ y \in V^* \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall x \in K \})$.

$Amp(X) = \{ \sum_i a_i [H_i] \mid a_i \geq 0 \ H_i \text{ es amplio} \}$

**Prop:** (Criterio de Kleinman).

$D$ es amplio $\iff \mathcal{X} \cdot T > 0 \quad \forall T \in \overline{NE}(X) \setminus \{0\}$.

i.e ( $Amp(X) = \{ x \in N_1(X) \mid \langle x, y \rangle > 0 \ \forall \ y \in \overline{NE}(X) \setminus \{0\} \}$ )

**Ejemplos triviales:**

$X = \mathbb{P}^2$, tenemos $N_1(X) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \{[L]\} \cong \mathbb{R}$.

$$NE(X) = \{ t[L] \mid t \geq 0 \} = \overline{NE}(X).$$
$$= Nef(X) = Amp(X).$$

$X = Bl_p(\mathbb{P}^2)$, $\quad N_1(X) = \mathbb{R}[\varepsilon^* L] \oplus \mathbb{R}[E]$.

$$NE(X) = \mathbb{R}^{\geq 0}[\varepsilon^* L] \oplus \mathbb{R}^{\geq 0}[E] = \overline{NE}(X).$$

$$Nef(X) = \mathbb{R}^{\geq 0}[\varepsilon^* L] \oplus \mathbb{R}^{\leq 0}[E] = Amp(X).$$

A4 - 210 x 297 - Grid Size 4mm www.blocklayer.com

* Ejemplo 1.

1) $NE(X) \neq \overline{NE}(X)$. $\quad X = E \times E$, $E$ curva elíptica.

Recuerdo que teníamos en dim 1. $0 \to \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} H^2(C,\mathbb{Z}) \to 0$.

$$H^2(C,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

y por tanto: $\mathrm{Pic}(C) = \mathrm{Pic}^0(X) \oplus \mathbb{Z}$ , en nuestro caso $\mathrm{Pic}^0(E) \cong E$.

Ahora: $\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2) \cong \mathrm{Pic}(C_1) \times \mathrm{Pic}(C_2) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Jac}(C_1), \mathrm{Jac}(C_2))$.

El cual en nuestro caso se transforma en

$$\mathrm{Pic}(E \times E) \cong (E \times \mathbb{Z}) \times (E \times \mathbb{Z}) \times \mathrm{End}(E).$$

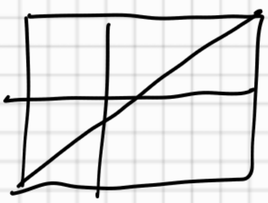
Suponemos que $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$. (multiplos de la identidad)

Más aún, $\mathrm{End}(E) = \langle id \rangle$ y notamos que:

$$NS(E \times E) \cong \mathbb{Z}^3 = \langle \underbrace{[\pi_1^* \mathcal{O}]}_{f_1}, \underbrace{[\pi_2^* \mathcal{O}]}_{f_2}, \underbrace{[\Delta]}_{\delta} \rangle$$

Tenemos obviamente que

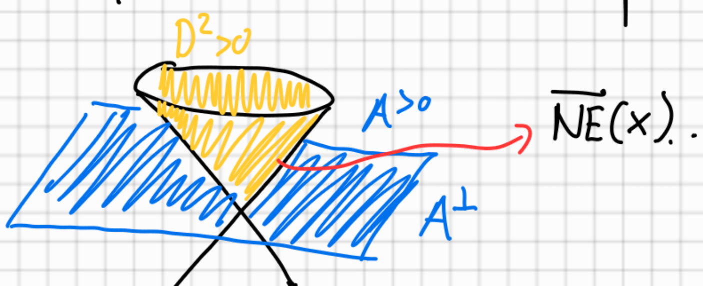
$$f_1^2 = f_2^2 = \delta^2 = 0 \qquad \text{porque } \omega_{E \times E} = \pi_1^* \omega_E \oplus \pi_2^* \omega_E = \mathcal{O}_E^{\oplus 2}$$
$$\Rightarrow 2g(\Delta) - 2 = \Delta^2 = 0.$$

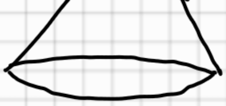
Además  $\Rightarrow f_1 \cdot f_2 = f_1 \cdot \delta = 1$, $f_2 \cdot \delta = 1$ $\Rightarrow ( , ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Notamos que si $D = x f_1 + y f_2 + z\delta$, $D^2 = 2xy + 2xz + 2yz$, establecemos la siguiente proposición.



**Prop:** $\overline{NE}(X) = \{[D] \in N_1(X) \mid D^2 \geq 0\} \cap A_{\geq 0}$ para $A$ amplio.





¿Por qué $\overline{NE}(X) \neq NE(X)$?

Note que para $[D] = \sum_i a_i [C_i]$, los $\mathbb{R}^{\geq 0}[C_i]$ corresponden a rectas con pendiente racional y $NE(X) = \mathrm{Conv}([C_i])$. Pero las rectas con pendiente irracional también están $\Rightarrow NE(X) \subsetneq \overline{NE}(X)$.

Dem: $\subseteq$ Trivialmente tenemos $\mathrm{Amp}(X) \subseteq NE(X)$.

En nuestro caso $NE(X) \subseteq \mathrm{Nef}(X)$

Para $D, D'$ divisores efectivos tenemos $E \times E \overset{\tau}{\curvearrowright} NE(X)$ dada por translación, y así mismo $\tau \cdot D \equiv D$.

Entonces $D \cdot D' = \tau D \cdot D' = \sum_{p \in \tau D \cap D'} \mathrm{mult}_p(\tau D, C) \geq 0$.

Por consiguiente, $D \cdot C \geq 0 \quad \forall\, C$ curva.

Al tener $NE(X) \subseteq \mathrm{Nef}(X) \Rightarrow \overline{NE}(X) \subseteq \mathrm{Nef}(X)$. Pero $\overline{\mathrm{Amp}(X)} = \mathrm{Nef}(X) \Rightarrow \mathrm{Nef}(X) \subseteq \overline{NE}(X)$.

* Si llamamos $K = \{[D] \mid D^2 \geq 0\} \cap \{[D] \mid A \cdot D > 0\}$

Vemos que $\mathrm{Nef}(X) \subseteq K$ porque en nuestro caso $\forall\, D$ nef se sigue que



$D^2 \geq 0$ y $D \cdot mA = m(D \cdot A) > 0$ para $m \gg 0 \Rightarrow \boxed{D \in K}$

* $\supseteq$ Si consideramos $v \in K^\circ \cap N^1(X)_{\mathbb{Q}} \Rightarrow v \in NE(X)$.

(Esto viene de Riemann-Roch). Sabemos que $\exists\, m$ tq $mv = [D] \in NS(X)$.

$\chi(D) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2} D^2$.

En nuestro caso $P_g(E\times E) = h^2(\mathcal{O}_{E\times E}) = h^0(K_{E\times E}) = 1$.

$$q(E\times E) = 2g(E) = 2$$

$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_X) = 0$.

Al tener $h^0(D) + h^0(-D) \geq \frac{1}{2} m^2 v^2 > 0$

* Si $h^0(D) > 0 \Rightarrow D \sim E$ con $E$ efectivo $\Rightarrow D \in NE(X)$.

* Si $h^0(-D) > 0 \Rightarrow -D \sim E$ con $E$ efectivo, pero $(A\cdot E) > 0$

$$\Rightarrow D\cdot A < 0 \ \text{\Large ↯}.$$

Por lo tanto, $v \in NE(X)$. Entonces, $K = \overline{K^{int} \cap N^1_{\mathbb{Q}}(X)} \subseteq \overline{NE}(X)$.

• Ejemplo 2:

$X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ y $f : X \to C$.

Sabemos de la teoría de superficies regladas que $X \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{E}\otimes\mathcal{L})$ para $\mathcal{L}$ line bundle



y $\deg(\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}) = \deg(\Lambda^2(\mathcal{E}\otimes\mathcal{L})) = \deg(\mathcal{L}\otimes\Lambda^2\mathcal{E}) = \deg(\mathcal{L}) + \deg(\Lambda^2\mathcal{E})$.

Entonces si tomamos $\mathcal{L}$ con $\deg(\mathcal{L}) = -k$, podemos siempre asumir que

$\boxed{\deg(\mathcal{E}) = 0}$

* Vamos a calcular el $\mathrm{Pic}(X)$.

$f^*\mathcal{E}$ $\qquad$ $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d] & {} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

En $f^*\mathcal{E} = \{(x,r)\in X\times\mathcal{E} \mid \pi(x)=f(r)\}$ tomamos

$$\mathcal{M} = \{([v], \lambda v)\in X\times\mathcal{E} \mid v\in\mathcal{E}\}.$$

Automáticamente vemos que se tiene $0\to\mathcal{M}\xhookrightarrow{i} f^*\mathcal{E}\to \mathrm{Coker}(i)\to 0$.

Definimos $\boxed{\mathcal{O}_X(1) := \mathrm{Coker}(i)}$.

Si $h$ es el divisor asociado a $\mathcal{O}_X(1)$, observamos que $h\cdot F = 1 \ \forall F$

porque $\mathcal{O}_X(1)\cdot F = \deg(\mathcal{O}_X(1)|_F) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = 1$.

**Proposición:**

$\mathrm{Pic}(X) = f^*\mathrm{Pic}(C)\oplus\mathbb{Z}[h]$

- $\varphi : f^*\mathrm{Pic}(C)\oplus\mathbb{Z}[h] \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ es un isomorfismo.

$$(f^*\mathcal{X}, nh) \longmapsto f^*\mathcal{X} + nh$$



- inyectividad: Si $f^*\mathcal{X} + nh = 0$, vemos que al intersectar con una fibra se tiene que $F\cdot(nh) = n = 0$. Luego si restringimos a una sección $H$

$$\Rightarrow f^*\mathcal{X}|_H = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i \sim \sum_{i=1}^{k} n_i P = 0 \Rightarrow \mathcal{X} = 0.$$

- Sobreyectividad:

Para cualquier $D\in\mathrm{Pic}(X)$, lo podemos escribir de la forma

$$D = D' + mh \text{ con } D'\cdot F = 0 \text{ para } F \text{ fibra}.$$

$\boxed{D' = D - (D\cdot F)h}$

* Esto es trivial tomando $\boxed{D' = D - (D\cdot F)/n}$.

- Vamos a demostrar que $D' = \sum_i n_i F_i$ con $F_i$ fibras.

Sea $D'_n = D' + nF$, notamos que para $n>>0$ se sigue que $h^2(D'_n) = 0$.

Esto es porque $(K - D'_n)\cdot H = K\cdot H - D'\cdot H - n < 0$ para $n>>0$ con $H$ muy amplio.

Luego, $|K - D'_n| = \emptyset$ y por lo tanto, $h^0(K - D'_n) = h^2(D'_n) = 0$

Observamos que $\begin{cases} D_n'^2 = D'^2 + 2n D'\cdot F + F^2 = D'^2 \\ D'_n\cdot K = D'\cdot K - n(K\cdot F) = D'\cdot K - 2n. \end{cases}$

Luego por Riemann-Roch:

$$\chi(D'_n) = 1 - g(C) + \frac{1}{2}(D'^2 - D'\cdot K + 2n)$$



y con $n>>0$ podemos notar que $h^0(D'_n) \geq 1 - g(C) + \frac{1}{2}(D'^2 - D'\cdot K + 2n) > 0$

$\Rightarrow \exists\, E \in |D'_n|$. Al tener que $E\cdot F = E\cdot(D' + nF) = 0$

esto implica que $E = \sum n_i F_i$ porque si $C \subseteq Supp(E) \Rightarrow 0 < C\cdot F \leq E\cdot F$ $\lightning$.

Por lo que, $D' + nF \sim E \Rightarrow D' \sim E - nF$. ∎

El Neron-Severi se puede calcular de manera sencilla porque $H^2(\mathcal{O}_X) = 0$.

Esto es porque si $h^2(\mathcal{O}_X) = h^0(K_X) > 0 \Rightarrow \exists\, E \in |K_X|$

Al tener que $K_X \cdot F = E \cdot F = -2 \implies E$ contiene todas las fibras lo cual es contradicción.

Con esto vemos que $\mathrm{Pic}(X) \overset{c_1}{\twoheadrightarrow} H^2(X,\mathbb{Z})$, y por lo tanto,

$$N_1(X) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{[F],[h]\}$$

- Calculo del cono efectivo de curvas.

Al principio asumimos que $\deg(\mathcal{E}) = 0 \implies h^2 = \deg(\mathcal{E}) = 0$ y así vemos que la matriz de intersección es $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Calculamos $\overline{NE}(X)$.

* Si $E$ es efectivo, sabemos que $E \in |mh + f^*\mathcal{L}|$ $\forall m \geq 0$ y $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C)$



Estudiamos las secciones globales de dicho haz.

$$H^0(\mathcal{O}_X(m) \otimes f^*\mathcal{L}) \cong H^0(C, f_*(\mathcal{O}_X(m) \otimes f^*\mathcal{L}))$$

$$\cong H^0(C, f_*\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{L}).$$ (fórmula de proyección).

Por la definición de $\mathbb{P}_C(\mathcal{E}) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$, se deduce que $f_*\mathcal{O}_X(m) = \mathrm{Sym}^m(\mathcal{E})$ y por tanto,

$$\boxed{H^0(X, \mathcal{O}_X(m) \otimes \pi^*\mathcal{L}) = H^0(C, \mathrm{Sym}^m(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}).}$$

Damos condiciones sobre la existencia de $E$ (Esto depende completamente de $\mathcal{E}$)

## Teorema: (Hartshorne)

Si $g(C) \geq 2$, entonces existen haces vectoriales estables $\mathcal{E}$ tales que

$$H^0(C, \mathrm{Sym}^m(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}) \neq 0 \Rightarrow \deg(\mathcal{L}) > 0.$$

* Si tomamos $\mathcal{E}$ de esta forma, observamos que $[E] = \underbrace{m}_{\geq 0}[h] + \underbrace{\deg(\mathcal{L})}_{>0}[F]$.

Por lo tanto, $\overline{NE}(X) = \mathbb{R}^{\geq 0}[h] \oplus \mathbb{R}^{\geq 0}[F]$.

Por la estabilidad de $\mathrm{Sym}^n(\mathcal{E})$, sabemos que:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) = H^0(C, \mathrm{Sym}^m(\mathcal{E})) = 0 \quad \forall\, m > 0$$

$\Rightarrow$ $mh$ no es efectivo $\forall\, m > 0$ y por tanto $m[h] \notin NE(X)$



Más aún el criterio de Kleinman requiere que $A \cdot D > 0$ $\forall\, D \in \overline{NE}(X) \setminus \{0\}$

En este caso $h \cdot D > 0$ $\forall\, D \in NE(X)$, pero $h^2 = 0$ (no es amplio).