Seminario Charla 5. X suave $/\mathbb{C}$.

* Objetivo: Clasificación de superficies con K_X no nef.

Recordatorio: Cono de Curvas: $NE(X) = \{ \sum_i a_i [C_i] \mid a_i \geq 0, C_i \text{ curvas} \} \subseteq N^1(X)$

Cono cerrado de curvas: $\overline{NE}(X)$ (Con la topología euclideana)

Cono Nef: $Nef(X) = \overline{NE}(X)^\vee \subseteq N_1(X)$

Cono amplio: $Amp(X) = \{ \sum_i a_i [H_i] \mid a_i \geq 0, H_i \text{ amplio} \}$.

$\overline{Amp(X)} = Nef(X)$.

Def: $K' \subseteq K$ subcono se dice extremal si $\forall u, v \in K$ tq $u+v \in K' \Rightarrow u, v \in K'$. (n-Cara).

· Si $K' = \mathbb{R}^{\geq 0} v$ lo llamamos rayo extremal. (1-Cara)

Consideramos X superficie suave por el resto de la charla.

Aspectos geométricos del cono cerrado de curvas.

La autointersección de curvas nos permite entender la topología y combinatoria de $\overline{NE}(X)$.

Proposición: a) La clase de C con $C^2 \leq 0$ está en $\partial \overline{NE}(X)$.

b) Si $C^2 < 0$, entonces $\mathbb{R}^{\geq 0}[C]$ es un rayo extremal de $\overline{NE}(X)$.

Dem: a) Si $C^2 = 0$ y asumimos que $[C] \in \overset{\circ}{\overline{NE}}(X)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para H amplio se sigue que $[C] + \varepsilon[H] \in \overline{NE}(X)$. No obstante, sabemos que $C \cdot D \geq 0$ $\forall$ $D \in NE(X)$, lo cual implica que $C \cdot D \geq 0$ $\forall D \in \overline{NE}(X)$ por continuidad. Notamos que $C \cdot (C + \varepsilon H) \geq 0$, pero $C^2 + \varepsilon(C \cdot H) < 0$ ↯.

$\Rightarrow [C] \in \partial \overline{NE}(X)$.

· Para la parte $C^2 < 0$ es suficiente con mostrar que $\overset{\geq 0}{\mathbb{R}}[C]$ es rayo extremal

Sabemos que $\overline{NE}(X) = \mathbb{R}^{\geq 0}[C] \oplus \overline{NE(X)}_{C\geq 0}$. Si $[C] = v_1 + v_2$ con $v_i = \lambda_i [C] + D_i$, observamos que $C^2 = (\lambda_1+\lambda_2)C^2 + \underbrace{C\cdot(D_1+D_2)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2 \geq 1$. Al tener que $0 = (\lambda_1+\lambda_2-1)[C] + D_1 + D_2$, e intersectar con H amplio $\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2-1)\underbrace{(C\cdot H)}_{\geq 0} + \underbrace{H\cdot(D_1+D_2)}_{\geq 0}$

Luego $\begin{cases} D_1 = D_2 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 1 \end{cases}$ y por lo tanto $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}[C]$.

Por otro lado, la combinatoria también provee información sobre las curvas.

Prop: a) Si $v \in \overline{NE}(X)$ genera un rayo extremal y $\rho(X) > 1 \Rightarrow v^2 \leq 0$.

b) Si v genera un rayo extremal y $v^2 < 0 \Rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} v = \mathbb{R}^{\geq 0}[C]$.

Dem: a) Lo demostramos viendo que si $v^2 > 0 \Rightarrow v \in (\overline{NE(X)})^{\circ}$.

Sea H amplio y tomamos $\mathcal{U}(v)$ abierto tq $\forall\, w \in \mathcal{U}(v)$ se tenga que $w^2 > 0$ y $w\cdot H > 0$. Sea w punto racional en $\mathcal{U}(v) \Rightarrow \exists\, k$ tq $kw = [D]$ con D divisor.

Para $m >> 0$ podemos garantizar $\chi(mD) = \frac{1}{2}m^2D^2 + O(m) > 0$.

$\Rightarrow h^0(mD) + h^0(K_X - mD) > 0$

$\Rightarrow |mD| \neq \emptyset$ o $|K_X - mD| \neq \emptyset$. Pero m lo podemos tomar tal que $(K_X - mD)\cdot H < 0 \Rightarrow |K_X - mD| = \emptyset$

luego $h^0(mD)>0$. Esto nos dice que $m[D]\in NE(X) \Rightarrow w\in NE(X)$.

Si ξ es irracional $\Rightarrow \xi\in \overline{U\cap Q^r}\subseteq \overline{NE}(X)$

b) Sea $R=\mathbb{R}^{\geq 0}v$.

Sabemos que $\exists\, (D_m)\subseteq NE(X)$ tq $D_m\to v$, entonces

$\exists\, M$ tq si $m\geq M$ $D_m\cdot v<0 \Rightarrow \exists\,[C]$ tq $C\cdot v<0$.

Por lo tanto, $v=\lambda_1[C]+D_2$ con $\lambda_1>0$. Dado que R es extremal

$\Rightarrow D_2\in R$, pero $D_2\neq 0 \Rightarrow D_2\cdot C<0$ ↯. Por lo tanto

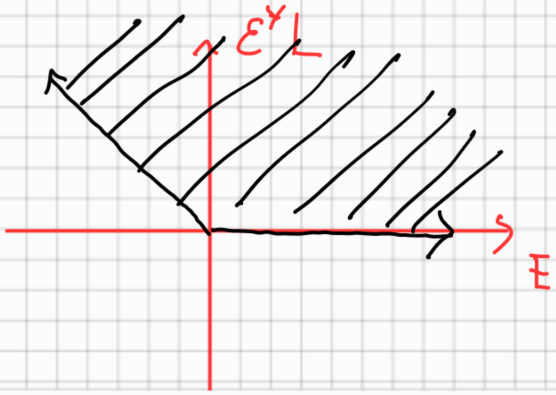
$v=\lambda_1[C] \Rightarrow R=\mathbb{R}^{\geq 0}[C]$.

Notamos que:

* Si $\rho(X)>1 \Rightarrow \{v\in\overline{NE}(X)\mid v^2>0\}\subseteq NE(X)^\circ$
* $\{[C]\in N_1(X)\mid C^2\leq 0\}\subseteq \partial(\overline{NE}(X))$
* No todos los elementos de frontera son necesariamente extremales.
  Pero $\{v\mid \mathbb{R}^{\geq 0}v \text{ es extremal}\}\subseteq\{v\mid v^2\leq 0\}$.
* $\left\{v\mid \begin{array}{c}\mathbb{R}^{\geq 0}v \text{ es extremal}\\ \text{y } v^2<0\end{array}\right\}=\{[C]\mid C^2<0\}$.

Ejemplo: $X=Bl_p(\mathbb{P}^2)$

$\overline{NE}(X)=\mathbb{R}^{\geq 0}[E]\oplus\mathbb{R}^{\geq 0}[\varepsilon^*L-E]$



$\text{Int}^\circ(\overline{NE}(X)) = \mathbb{R}^{>0}[E] \oplus \mathbb{R}^{>0}[\varepsilon^* L]$

$\partial \overline{NE}(X) = \mathbb{R}^{\geq 0}[E] \cup \mathbb{R}^{\geq 0}[\varepsilon^* L - E]$.

- Note que $(\varepsilon^* L + E)^2 = 0$ y $\varepsilon^* L + E \in \overline{NE}^\circ(X)$. (La contenencia es estricta).

Teorema del Cono:

Sea X una superficie suave, entonces

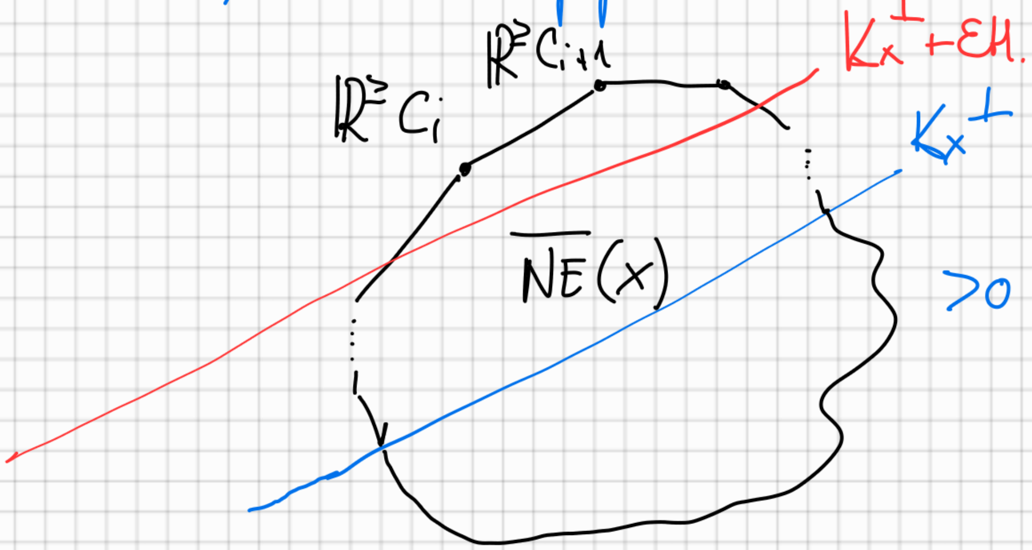
1) Existen enumerables curvas racionales C_i tq $-3 \leq C_i \cdot K_X < 0$ y

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i].$$

2) $\forall\, \varepsilon > 0$ y H divisor amplio,

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{(K_X + \varepsilon H) \geq 0} + \sum_{\text{finitos}} \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i].$$

Dibujo: El K_X induce un hiperplano



La condición 2 dice básicamente que los rayos son discretos y por lo tanto, $\overline{NE}(X) \cap \overline{NE}(X)_{K_X + \varepsilon H < 0}$ es polihedral. (Combinación cónica de finitos vectores).

$\ast$ Para demostrar este teorema se requiere de dos ingredientes:

Teorema 1 (Racionalidad).

Sea X una superficie suave tal que K_X no es nef y sea H un divisor amplio.

Sea $r = \sup\{t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid H + tK_X \text{ es nef}\}$.

Entonces $r \in \mathbb{Q}$ (nef threshold). $\Rightarrow mL_r = [D]$ $\forall m$.

Teorema 2 (Teorema sin puntos bases).

Sea X proyectiva y H un divisor amplio y $H + aK_X$ es nef para $a \in \mathbb{Q}$.

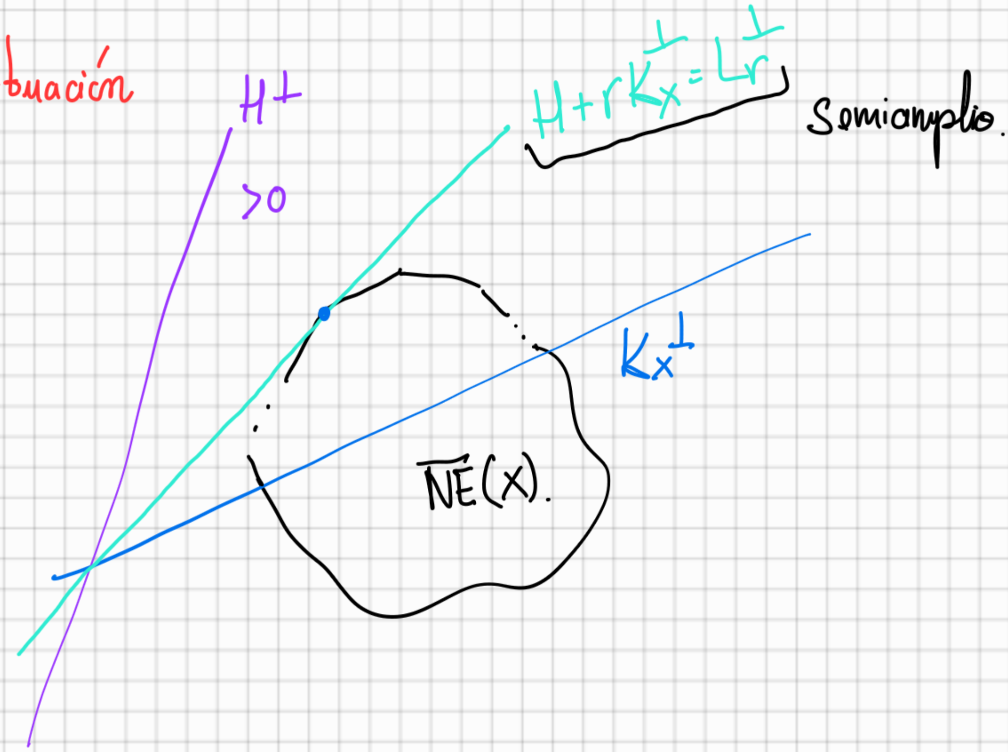
$\Rightarrow L_a$ es semiamplio ($|dL_a| \neq \emptyset$ y no tiene puntos base $\forall d > 0$).

Al tener $\varphi_{|dL|} : X \to Z$ sabemos que curvas contrae.

Recuerde que $dL = \varphi^* H$ y que $D \cdot \varphi^* H = \varphi_* D \cdot H$. Por lo tanto,

C contrae $\Leftrightarrow C \cdot dL = d(C \cdot L) = 0$.

Con dibujos esta situación



Entonces al tomar $\underline{H \text{ genérico}}$ y $L = rK_X + H$, r nef threshold

$\overline{NE}(X) \cap L^\perp = R$ donde $R = \mathbb{R}^{\geq 0}[C]$ para algún $[C]$.

$\Rightarrow \varphi = \varphi_{|dL|} : X \to Z$ y los divisores que contrae están en $\lambda[C]$.

* Remarks: 1) φ trae la propiedad $\varphi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$, lo cual implica que φ es el único mapa que contrae a C y $\varphi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$. Lo llamamos contr_R.

2). No todos los rayos extremales admiten una contracción.

Minimal Model Program:

Asumimos que K_X no es nef. $\Rightarrow \exists\ \mathrm{contr}_R : X \to Z$., es del siguiente tipo:

$\dim(Z)$	Tipo de contracción.
2	Blow down
1	$X \to Z$ es una superficie reglada.
0	$X \to \{pt\}$, $\rho(X) = 1$ y $-K_X$ amplio

En la siguiente charla veremos que las contracciones extremales están determinadas por una curva (la curva$/\equiv$). Más aún el tipo de contracción viene completamente determinado por la autointersección de la curva que genera el rayo extremal R. - fin charla -

Bonus: El teorema de Libre de puntos base es crucial para entender como se producen la totalidad de contracciones extremales.

Teorema: Sea X una superficie suave, sea $L = A + rK_S \in N_1(X)_{\mathbb{Q}}$ con $r \in \mathbb{Q}^{>0}$ y L nef, entonces lL no tiene puntos base para $l >> 0$ y $lr \in \mathbb{N}$.

Dem: Al ser L nef, tenemos que $(nL+A)^2 > 0 \quad \forall n \geq 0$.

Pero $L^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(nL+A)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(n^2L^2 + \cancel{2n(L\cdot A)} + \cancel{A^2}\right) \geq 0$.

• Supongamos que $L^2 > 0$. Si $L\cdot C > 0 \ \forall C \Rightarrow L$ es amplio lo cual es trivial.

Entonces supongamos que L es nef, pero no amplio. Entonces existe una curva tq $L\cdot E = 0 \Rightarrow L\cdot E = E\cdot A + r(K_X\cdot E) = 0 \Rightarrow K_X\cdot E < 0$.

Por el teorema del índice de Hodge: $L\cdot E = 0$ y $L^2 > 0 \Rightarrow E^2 < 0$.

Por adjunción sabemos que $E^2 = K_X\cdot E = -1$.

Por Castelnuovo tenemos $\varepsilon : X \to X'$ con X' suave también.

Ahora: $L' = \varepsilon_*(L)$ es un Line bundle porque $L^2 > 0$.

$$L' = \varepsilon_*(A) + rK_{X'} \quad \text{y} \quad \varepsilon_*(A) \text{ es amplio.}$$

$$A = \varepsilon^*(\varepsilon_*(A)) + kE \Rightarrow A^2 = (\varepsilon_*(A))^2 - k^2 > 0 \Rightarrow \varepsilon_*(A)^2 > 0.$$

También tenemos que $\varepsilon_*(A)\cdot C = A\cdot\varepsilon^*(C) = A\cdot(\hat{C} + m_p(C)E) > 0$

L' es nef también: $L'\cdot\varepsilon_*(C) = L\cdot C > 0$ por definición prácticamente.

∗ Ahora, si L' es amplio $\Rightarrow \exists\, l >> 0$ tq lL' es base point free

$\Rightarrow lL$ es base point free ($\varphi_{|lL'|}$ es embedding, tenemos que con

$(\varepsilon \circ \varphi_{|lL'|})^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \varepsilon^*(lL') = lL \Rightarrow \varphi_{|lL|}$ es morfismo).

* Si L' no es amplio repetimos finitas veces hasta que $L^{(n)}$ sea base point free.

Caso $L^2 = 0$, $L \neq 0$.

$\exists C$ curva tal que $L \cdot C > 0$, sabemos que $\exists\, h >> 0$ tq $|hA - C| \neq \emptyset$. ¿amplio.

$\Rightarrow L \cdot hA = L \cdot (hA - C) + L \cdot C \geq L \cdot C > 0$.

$\Rightarrow L \cdot A > 0$. Ahora, $0 = L^2 = L \cdot (A + rK_X) = L \cdot A + r(L \cdot K_X)$

$\Rightarrow \boxed{L \cdot K_X < 0}$

Tenemos que $lL - K_S = lL - \frac{1}{r}(A - L) = \frac{1}{r}A + \frac{lr - 1}{r} L$.

$\Rightarrow lL - K_S$ es amplio para $l >> 0$ ($lr - 1 > 0$) suma de algo amplio con un nef.

$\Rightarrow$ Al tomar $l >> 0$ $\chi(lL) = h^0(lL) = \chi(\mathcal{O}_X) - \frac{1}{2} lL \cdot K_S > 0$.
Serre Vanishing.

* $|lL|$ aún no determina un morfismo, puede tener componentes fijas.

$|M| = |lL| - F$ donde $\forall D \in |lL|$ $D - F \geq 0$ y $|M|$ no tiene

no tiene componentes fijas.

Vemos que al ser M no fijo $\Rightarrow \exists\, E, E' \in |M| \Rightarrow M^2 = E\cdot E' \geq 0$

y luego tenemos $0 \leq M^2 \leq M\cdot(M+F) = M\cdot lL \leq (lL)^2 = 0$

$$\Rightarrow M^2 = M\cdot F = F^2 = 0.$$

$\Rightarrow \varphi_{|M|} : X \to \mathbb{P}^N$ es un morfismo. Ahora, como M no tiene componentes fijas y contrae más de una curva $\Rightarrow \varphi_{|M|} : X \to D$.

con D curva. Ahora, como $M\cdot F = 0 \Rightarrow F \subseteq \varphi^*(p)\ \forall p$, pero por el Teo de Zariski si $F^2 = 0 \Rightarrow F = \varphi^*(\sum a_i P_i)$.

A través de la factorización de Stein, notamos que $l'lL = \varphi^*(L')$ con L' muy amplio $\Rightarrow l'lL$ es bpf.

- Caso $L^2 = 0$ con $L \equiv 0$.

$A + rK_S = 0 \Rightarrow K_S = -\frac{1}{r} A$ es amplio $\Rightarrow -K_S$ es amplio.

Similarmente $lL - K_S \equiv \frac{1}{r} A$ amplio $\forall\, l > 0$ porque L es nef.

Por Kodaira Vanishing $\Rightarrow h^i(K_S - K_S) = h^i(\mathcal{O}_S) = 0$ para $i > 0$.

$$\Rightarrow h^i(lL) = 0 \text{ para } i > 0$$

$\Rightarrow h^0(lL) = \chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_S) = 1.$

Entonces. $\Rightarrow lL \sim E$ efectivo $\Rightarrow E \equiv 0 \Rightarrow E = 0$

$$\Rightarrow \boxed{lL = 0}$$

y por lo tanto $\varphi_{|\ell L|} : X \to \{pt\}$.